1-nji BÖLÜM

STATIKA

Statika-Nazary mehanikanyň gaty jisime täsir edýän güýçleriň deňagramlaşmagyny öwrenýän bölümi.

1-nji BAP
Statikanyň esasy düşünjeleri we başlangyç taglymatlary. Ýygnanýan güýçler sistemasy

§1. Statikanyň esasy düşünjeleri we esasy meseleleri. Statikanyň aksiomalary. Baglanyşyk.

1. **Statikanyň esasy düşünjeleri.**
2. **Statikanyň esasy meseleleri.**
3. **Statikanyň aksiomalary. Üç güýç hakynda teorema.**
4. **Baglanyşyk. Baglanyşygyň reaksiýasy. Erkinleşdirmek taglymaty.**
5. **Baglanyşygyň görnüşleri.**

1.1. Statikanyň esasy düşünjeleri.

Tebigatda gabat gelýän gaty jisimler daşky täsirleriň netijesinde belli bir derejede öz geometrik formasyny üýtgedýär (deformirlenýär). Bu deformasiýalaryň ölçegleri jisimiň materialyna, geometrik formasyna we daşky täsirlere baglydyrlar.

Inžener desgalarynyň we konstruksiýalarynyň materiallary, ölçegleri kesgitlenende daşky täsirleriň netijesinde alynýan deformasiýalaryň ýeterlik derejede kiçi bolmaklygyny üpjün etmek wezipesinden ugur alynýar. Şu sebäpli deňagramlygy öwrenilýän gaty jisimiň deformasiýalaryny ujypsyz (göz öňünde tutmasyz) hasaplap, gaty jisim absolýut gaty hökmünde kabul edilýär.

Kesgitleme. Nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk üýtgemeýän jisime **absolýut gaty jisim** diýilýär.

Bellik. Statikanyň meseleleri işlenende jisimler absolýut gaty (mundan beýläk "gaty jisim") diýip kabul edilýär.

Indi jisimiň deňagramlyk ýagdaýynyň kesgitlemesini girizeliň.

Kesgitleme. Gaty jisimiň otnositel (berkidilen jisime görä) dynçlyk ýagdaýyna ýa-da gönüçyzykly, deňölçegli hereketine gaty jisimiň deňagramlyk ýagdaýy diýilýär.

Jisimiň deňagramlygy ýa-da hereketi bu jisimiň beýleki jisimler bilen özara mehaniki täsirine bagly.

Öň bellenip geçilişi ýaly, özara mehaniki täsiriň ölçegi güýç bolup durýar.

Kesgitleme. Jisimleriň özara täsirleriniň ugruny we ululygyny kesgitleýän fiziki ululyga **güýç** diýilýär.

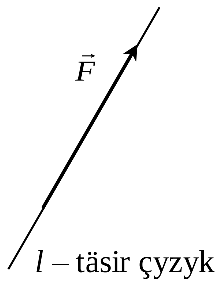
Güýç wektor ululyk bolup, 3 sany faktor bilen doly kesgitlenýär:

1. Goýlan nokady (täsir edýän nokady);
2. ugry;
3. ululygy.

Güýji belgilemek üçin ýokarsynda wektor belgisi goýlan baş harplar ulanylýar. Meselem, $\vec{F}, \vec{G}, \vec{T}$ we ş.m. Güýjüň ululygyny (modulyny) aňlatmak üçin bu harplar wektorsyz ýazylýar: F, G, T we ş.m.

Güýç ugrukdyrylan kesim (wektor) bilen şekillendirilýär (1.1-nji surat). Saýlanyp alnan masştabda bu kesimiň uzynlygy bilen güýjüň moduly kesgitlenýär.

Kesgitleme. Güýjüň ugrukdyrylan göni çyzygyna **güýjüň täsir çyzygy** diýilýär.



1.1-nji surat

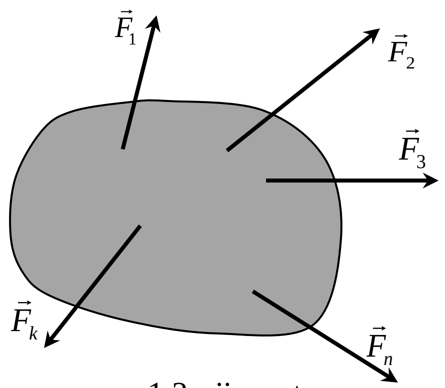
Güýjüň ölçeg birligi-**Nýuton (N);** $1N = 1kg\,\dfrac{m}{sek^2}$

Tehniki birlikler sistemasynda güýjüň ölçeg birligi hökmünde **kilogram (kG)** ulanylýar:

$$1kG \approx 9{,}8N$$

Statikanyň esasy düşünjeleriniň ýene-de birnäçesiniň kesgitlemesini girizeliň.

Kesgitleme. Gaty jisime täsir edýän güýçleriň toplumyna **güýçler sistemasy** diýilýär.



1.2-nji surat

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$-gaty jisime goýlan güýçler. Güýçler sistemasy $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ ýaly belgilenýär.

Kesgitleme. Eger güýçler sistemasynyň täsirinde gaty jisim deňagramlyk ýagdaýynda bolsa, bu güýçler sistemasyna **deňagramlaşan güýçler sistemasy** diýilýär.

Kesgitleme. Eger jisimiň kinematiki ýagdaýyny (hereketiniň häsiýetnamasyny) üýtgetmezden täsir edýän $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasyny başga bir $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_k\}$ güýçler sistemasy bilen çalşyryp bolýan bolsa, bu güýçler sistemalaryna **deňgüýçli** güýçler sistemalary diýilýär. Deňgüýçliligiň belgilenilişi: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\} \sim \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_k\}$

Kesgitleme. Eger güýçler sistemasy bir güýje deňgüýçli bolsa, onda bu güýje güýçler sistemasynyň **deňtäsiredijisi** diýilýär.
Kesgitleme. Eger güýçler sistemasyna girýän güýçleriň täsir çyzyklary bir nokatda kesişýän bolsa, onda bu güýçler sistemasyna **ýygnanýan güýçler sistemasy** diýilýär.

1.2. Statikanyň esasy meseleleri.

Statikada seredilýän esasy meseleler:

- **I.** Güýçler sistemasyny deňgüýçli güýçler sistemasy bilen çalşyrmak.
- **II.** Gaty jisimiň deňagramlyk ýagdaýynda bolmagy üçin täsir edýän güýçler sistemasynyň kanagatlandyrmaly şertlerini kesgitlemek.

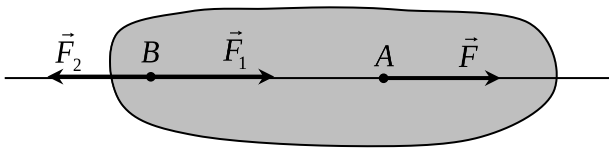
1.3. Statikanyň aksiomalary[1]. Üç güýç hakynda teorema[2].

Statikanyň esasynda asyrlar boýy tejribeleriň esasynda tassyklanyp gelýän birnäçe taglymatlar, ýagny aksiomalar ýatyr. Bu aksiomalary we olardan gelip çykýan käbir netijeleri getireliň.
1-nji aksioma. Iki sany güýjüň deňagramlaşmagy üçin bu güýçleriň ululyklary boýunça deň bolup, bir göni çyzyk boýunça gapma-garşylykly ugrukdyrylan bolmaklary zerur we ýeterlikdir.
2-nji aksioma. Güýçler sistemasynyň gaty jisime edýän täsirini üýtgetmezden bu güýçler sistemasyna deňagramlaşan güýçler sistemasyny goşup ýa-da sistemadaky deňagramlaşan güýçler sistemasyny aýryp bolýar.
2-nji aksiomadan gelip çykýan netije:

Güýjüň jisime bolan täsirini üýtgetmezden güýji onuň täsir çyzygy boýunça göçürip bolýar.

Bu netijäni aşakda görkezilişi ýaly subut edip bolar:

Goý, jisimiň A nokadyna $\vec{F}$ güýç täsir edýän bolsun. $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygynda erkin B nokady alalyň. Bu nokatda ululyklary boýunça F-e deň, $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygynda gapma-garşylykly ugrukdyrylan $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleri goýalyň.

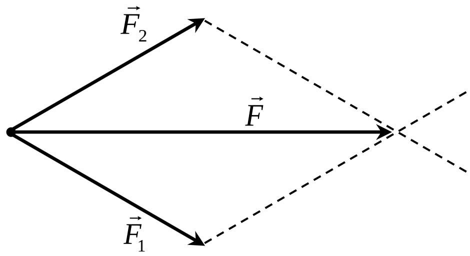


1.3-nji surat

Birinji aksioma boýunça $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ deňagramlaşan güýçler sistemasy bolup durýar. Diýmek, bu güýçler sistemasynyň goşulmagy bilen jisimiň kinematiki ýagdaýy üýtgemeýär. Emma, birinji aksiomanyň esasynda $\{\vec{F}, \vec{F}_2\}$-deňagramlaşan güýçler sistemasy. Diýmek, ikinji aksiomanyň esasynda $\vec{F}, \vec{F}_2$ güýçleri aýranymyz bilen jisimiň kinematiki ýagdaýy üýtgemez. Netijede ululygy boýunça F-e deň, $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygy boýunça ugrukdyrylan B nokatda goýlan $\vec{F}_1$ güýç galýar.

[1] Aksioma-grek sözi, ylmy nazaryýetiň esasyny tutýan, subutsyz kabul edilen taglymat.
[2] Teorema-grek sözi, görýärin, seljerýärin, matematiki amallar bilen subut edilip gelnen netije.

3-nji aksioma. Bir nokatda goýlan iki sany güýjüň deňtäsiredijisi bu güýçleriň üstünde gurlan parallelogramyň diagonaly boýunça ugrukdyrylan.



1.4-nji surat

Ýagny bir nokatda goýlan iki sany güýjüň deňtäsiredijisi bu güýçleriň wektorlaýyn jemine deň; $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \vec{F}$;

deňtäsiredijiniň ululygy: $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha}$, bu ýerde, $\alpha - \vec{F}_1, \vec{F}_2$ wektorlaryň arasyndaky burç.

Üçünji aksiomadan gelip çykýan netije:

Ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi bu sistema girýän güýçleriň wektorlaýyn jemine deň.

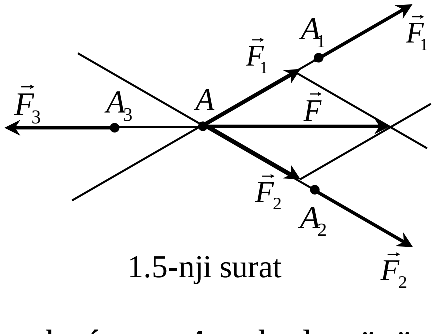
Bu tassyklamany subut edeliň.

Goý, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$-ýygnanýan güýçler sistemasy bolsun. Üçünji aksiomanyň esasynda $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleri $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ güýç bilen çalşyralyň. Soňra $\vec{F}, \vec{F}_3$ güýçleri $\vec{F} + \vec{F}_3$ güýç bilen çalşyralyň. Bu yzygiderligi dowam etsek netijede bir güýje geleris.

Şu ýerde ýokarda getirilen aksiomanyň esasynda subut edilýän üç güýç hakyndaky teoremany seljereliň.

Üç güýç hakynda teorema. Eger deňagramlaşýan üç sany güýjüň ikisiniň täsir çyzyklary bir nokatda kesişýän bolsa, onda üçünji güýjüň täsir çyzygy bu nokatdan geçýär; şeýlelikde, güýçleriň üçüsi hem bir tekizlikde ýatýar.

Subudy. Goý, degişlilikde A_1, A_2, A_3 nokatlarda goýlan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ güýçlerden ybarat $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ güýçler sistemasy deňagramlaşan bolsun. $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleriň täsir çyzyklary kesişýän bolsun. Olaryň kesişýän nokadyny *A* bilen belgiläliň.



1.5-nji surat

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleri täsir çyzygy boýunça *A* nokada göçüreliň. Üçünji aksiomany ulanyp $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleriň deňtäsiredijisi bolan $\vec{F}$ güýji kesgitläliň, ýagny $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \vec{F}$.

Indi, $\vec{F}_3$ we $\vec{F}$ güýçlerden ybarat bolan deňagramlaşan sistemany aldyk. Onda, birinji aksiomanyň esasynda $\vec{F}_3$ we $\vec{F}$ güýçler bir göni çyzyk boýunça garşylykly ugrukdyrylan, ýagny $\vec{F}_3$ güýjüň täsir çyzygy A nokatdan geçýär, şeýle-de, bu täsir çyzyk $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçleriň üstünde gurlan parallelogramyň tekizliginde ýatýar. Teorema subut edildi.

4-nji aksioma. Jisimleriň bir-birine edýän täsirleri (güýçler) ululyklary boýunça deňdirler, bir göni çyzyk boýunça gapma-garşylykly ugrukdyrylandyrlar.

5-nji aksioma. Deňagramlykdaky deformirlenýän jisim gatylyk ýagdaýyna geçende hem deňagramlyk ýagdaýyny saklaýar.

1.4. Baglanyşyk. Baglanyşygyň reaksiýasy. Erkinleşdirmek taglymaty.

Statikanyň meselelerinde *erkin däl*, ýagny hereketi başga jisimler tarapyndan çäklendirilen jisimleriň deňagramlygyny öwrenmeli bolýar. Erkin däl jisimiň hereketini çäklendirýän jisime *baglanyşyk* diýilýär. Meselem, stoluň üstünde duran jisim üçin stol, podşipnige oturdylan wal üçin podşipnik, diwara direlip duran merdiwan üçin diwar baglanyşyk bolup durýar.

Erkin däl jisime degişli mesele ýüze çykanda baglanyşygyň özi däl-de, onuň täsiri göz öňünde tutulýar. Şu babatda aşakdaky kesgitlemeleri we bir taglymaty girizeliň.

Kesgitleme. Baglanyşygyň jisime edýän täsirine (güýç) **baglanyşygyň reaksiýasy** diýilýär.

Kesgitleme. Giňişlikde islendik ugra ornuny üýtgedip bilýän jisime **erkin jisim** diýilýär.

Erkinleşdirmek taglymaty:

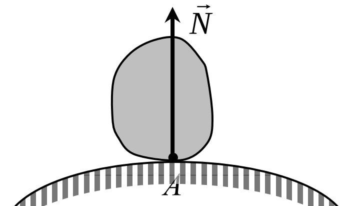
Baglanyşyklaryň ornuna reaksiýa güýçlerini girizip, erkin däl jisimi erkin jisim hökmünde kabul edip bolýar.

1.5. Baglanyşygyň görnüşleri.

Ýokarda bellenip geçilişi ýaly, amaly meselede baglanyşygy onuň reaksiýasy bilen çalşyrmaly.

Baglanyşygyň görnüşine görä onuň reaksiýasynyň ugruny nädip kesgitlemelidigini aşakda getirilen esasy baglanyşyklar üçin öwreneliň.

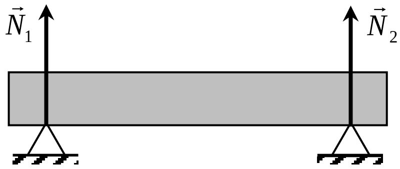
1. Jisim A nokatda ýylmanak (sürtülme ýok) üste daýanýar.



1.6-njy surat

Ýylmanak üstüň reaksiýasy bu üste perpendikulýar; $\vec{N}$ -üstüň reaksiýasy.

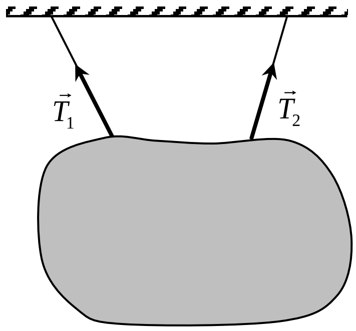
2. Jisim gozganmaýan nokada daýanýar.



1.7-nji surat

Daýanç nokadyň reaksiýasy jisimiň üstüne perpendikulýar; $\vec{N}_1, \vec{N}_2$-reaksiýa güýçleri.

3. Jisim ýüpe (tanap, zynjyr we ş.m.) berkidilen.

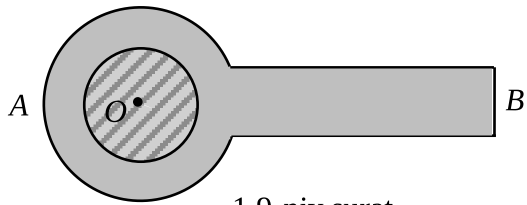


1.8-nji surat

Reaksiýa güýji ýüp (tanap, zynjyr) boýunça ugrukdyrylan; $\vec{T}_1, \vec{T}_2$-reaksiýa güýçleri.

4. Silindrik şarnir.

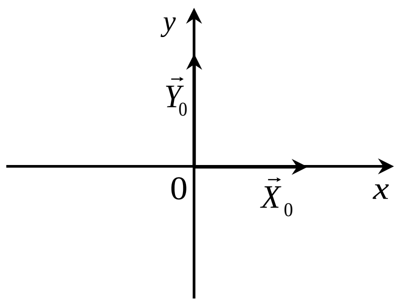
AB wtulka bolta (pahna) geýdirilýär. Wtulkanyň içki radiusy boltuň radiusy bilen deň. *AB* wtulka bilen berkidilen jisim boltuň okunyň daşyndan aýlanyp bilýär.



1.9-njy surat

Wtulkanyň içki üsti bilen boltuň arasynda sürtülme bolmadyk ýagdaýynda silindrik şarniriň reaksiýasy aýlanma okuna perpendikulýar.

Bellik. Mysal işlenende silindrik şarniriň $\vec{R}$ reaksiýasyny iki sany özara perpendikulýar düzüjilere dargatmak maslahat berilýär.

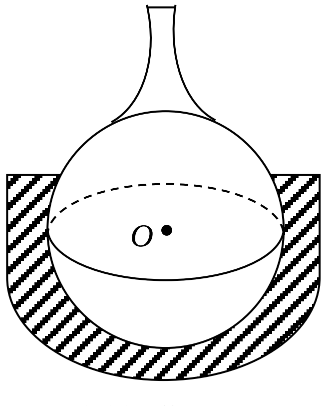


1.10-njy surat

$$\vec{R} \sim (\vec{x}_O, \vec{y}_O)$$

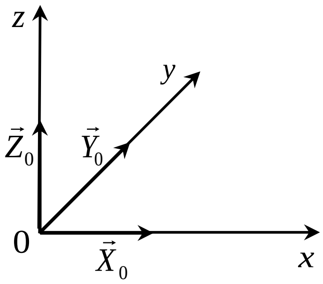
5. Sferik şarnir.

Jisim hereket edende sferik şarniriň merkezi *O* nokat gozganmaýar.



1.11-nji surat

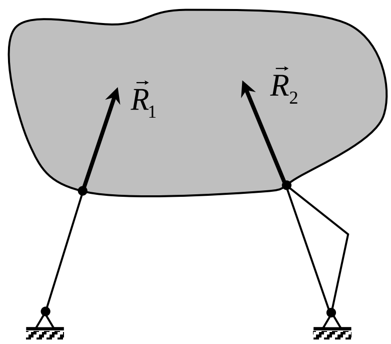
Sferik şarniriň reaksiýasy *O* nokatda goýlup, sferanyň üstüne perpendikulýar.
Bellik. Mysal işlenende sferik şarniriň $\vec{R}$ reaksiýasyny özara perpendikulýar üç sany düzüjä dargatmaklyk maslahat berilýär.



1.12-nji surat

$$\vec{R} \sim \{\vec{x}_O, \vec{y}_O, \vec{z}_O\}.$$

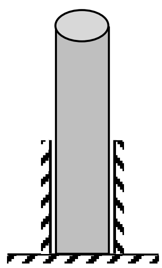
6. Şarnirli birikdirilen agramsyz sterženi.



1.13-nji surat

Bu görnüşli baglanyşygyň reaksiýasy şarnirleriň üstünden geçýän göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan; $\vec{R}_1, \vec{R}_2$-agramsyz sterženleriň reaksiýalary.

7. Dabanoý (podpýatnik)-silindrik şarnir bilen daýanç tekizliginiň utgaşmasy.



1.14-nji surat

Bu görnüşli baglanyşyk wala öz okunyň daşyndan aýlanyp, bu ok boýunça ornuny üýtgetmäge ýol berýär.

Baglanyşygyň reaksiýasy silindrik şarniriň we daýanç tekizliginiň reaksiýasyndan ybarat.

Bellik. Birikmelerde ulanylýan başga görnüşli baglanyşyklary ýöriteleşdirilen edebiýatlardan görüp bolar. Meselem, [11]

§2. Güýjüň proýeksiýasy.

1. **Güýjüň proýeksiýasy.**
2. **Güýjüň analitikii berlişi.**
3. **Güýçleri goşmagyň analitikii usuly.**
4. **Güýji düzüjilere dargatmak.**

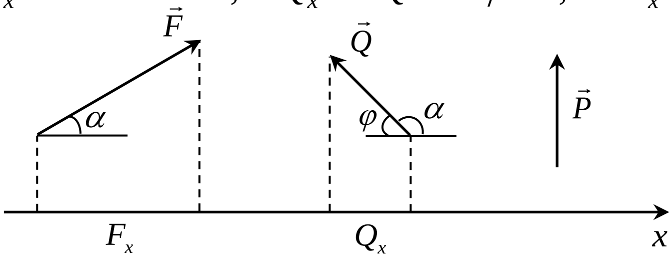
2.1. Güýjüň proýeksiýasy.

Statikanyň meselelerini çözmekligiň analitikii usulynda güýjüň proýeksiýasy ulanylýar.

Güýjüň oka proýeksiýasy-algebraik ululyk bolup, bu güýjüň ululygynyň güýç bilen okuň položitel ugrunyň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeltmek hasylyna deň. Şeýlelikde, eger bu burç kütek bolsa, proýeksiýa otrisatel, eger bu burç ýiti bolsa, proýeksiýa položitel. Eger güýç oka perpendikulýar bolsa, proýeksiýa nola deň.

Suratda görkezilen güýçleriň *x* oka proýeksiýalary:

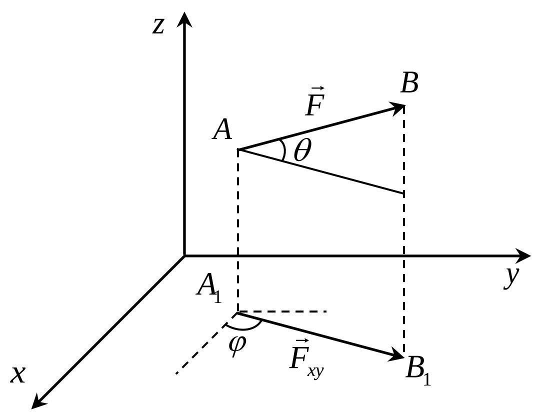
$$F_x = F \cdot \cos\alpha \quad , \quad Q_x = -Q \cdot \cos\varphi \quad , \quad P_x = 0$$



2.1-nji surat

Güýjüň tekizlige proýeksiýasy oka proýeksiýadan tapawutlylykda wektor ululyk bolup durýar. Güýjüň tekizlige proýeksiýasy bu güýji şekillendirýän wektoryň başky we soňky nokatlarynyň tekizlige proýeksiýalarynyň arasyndaky wektordyr.

2.2-nji suratda $\vec{F}$ güýjüň *xy* tekizlige proýeksiýasy şekillendirilen, $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{A_1B_1}$



2.2-nji surat

Moduly boýunça $F_{xy} = F \cdot \cos\theta$. Bu ýerde, θ-$\vec{F}$ güýç bilen onuň F_{xy} proýeksiýasynyň arasyndaky burç.

Käbir halatlarda güýjüň oka proýeksiýasyny tapmak üçin ilki bilen güýji bu oky saklaýan tekizlige proýektirläp, soň oka proýektirlemek amatly bolýar.

2.2-nji suratda görkezilen $\vec{F}$ güýç üçin

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi, \quad F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$$

deňlikleri alarys.

2.2. Güýjüň analitikii berlişi.

Güýji analitikii usulda bermek üçin giňişlikde *Oxyz* dekart koordinatalar sistemasyny saýlap almaly.

$\vec{F}$ güýji şekillendirýän wektory gurmak üçin bu güýjüň modulyny, bu güýjüň Ox, Oy, Oz oklar bilen emele getirýän α, β, γ burçlaryny bilmeli. Güýjüň goýlan (täsir edýän) nokady aýratynlykda berilmeli.

Mehanikanyň meselelerinde güýji onuň F_x, F_y, F_z proýeksiýalary bilen bermek amatly. Bu proýeksiýalar berlende $\vec{F}$ güýjüň modulyny, güýjüň koordinata oklary bilen emele getirýän burçlaryny aşakda getirilen formula bilen kesgitläp bolar:

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}, \cos\beta = \dfrac{F_y}{F}, \cos\gamma = \dfrac{F_z}{F} \end{cases} \tag{2.1}$$

Eger seredilýän güýçler sistemasyna girýän güýçler bir tekizlikde, meselem, *Oxy* tekizliginde ýerleşýän bolsa onda (2.1) formula

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}, \cos\beta = \dfrac{F_y}{F} \end{cases} \tag{2.2}$$

görnüşe eýe bolar.

2.3. Güýçleri goşmagyň analitikii usuly.

Birnäçe güýçleri analitikii goşmaklyk geometriýanyň aşakda getirilen teoremasynyň esasynda amala aşyrylýar.

Wektorlaryň jeminiň käbir oka proýeksiýasy bu wektorlaryň şu oka proýeksiýalarynyň jemine deň.

Goý, $\vec{R} - \vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ wektorlaryň jemi bolsun. Ýagny $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$. Onda ýokarda getirilen teoremanyň esasynda

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \tag{2.3}$$

formulany alarys.

Onda (2.1) formula boýunça taparys:

$$\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{R_x}{R} \text{ , } \cos\beta = \dfrac{R_y}{R} \text{ , } \cos\gamma = \dfrac{R_z}{R} \end{cases} \tag{2.4}$$

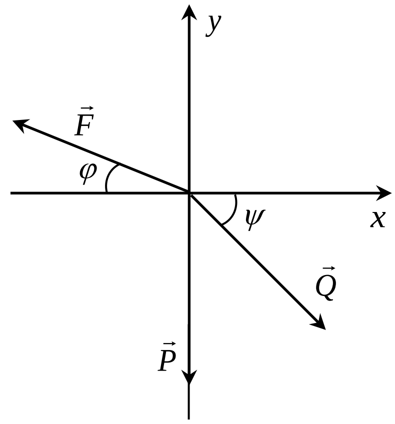
(2.3) we (2.4) formulalar güýçleri goşmaklygyň analitikii usulyny görkezýär. Tekizlikdäki güýçler üçin degişli formulalar şu görnüşde bolar:

$$\begin{cases} R_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} \text{ , } R_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \text{ , } \cos\alpha = \dfrac{R_x}{R} \text{ , } \cos\beta = \dfrac{R_y}{R} \end{cases} \tag{2.5}$$

Bir ýönekeý mysala seredeliň.

Mysal. Bir tekizlikde (xy) ýatýan $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$ güýçleriň jemini tapmaly.

$$F = 20N \text{ , } Q = 30N \text{ , } P = 40N \text{ , } \varphi = 30^0 \text{ , } \psi = 60^0$$



2.3-nji surat

Çözülişi. Güýçleriň proýeksiýalaryny tapalyň.

$$F_x = -F \cdot \cos\varphi = -20N \cdot \cos 30^0 = -10\sqrt{3}\,N$$

$$F_y = F \cdot \cos\left(90^0 - \varphi\right) = 20N \cdot \cos 60^0 = 10\,N$$

$$Q_x = Q \cdot \cos\psi = 30N \cdot \cos 60^0 = 15\,N$$

$$Q_y = -Q \cdot \cos\left(90^0 - \psi\right) = -30N \cdot \cos 30^0 = -15\sqrt{3}\,N$$

$$P_x = 0 \quad , \quad P_y = -P = -40\,N$$

$\vec{R}$-güýçleriň jemi, $\vec{R} = \vec{F} + \vec{Q} + \vec{P}$. (2.5) formuladan alarys:

$$R_x = F_x + Q_x + P_x = -10\sqrt{3}N + 15N + 0 \approx -2{,}3\ (N)$$

$$R_y = F_y + Q_y + P_y = 10N - 15\sqrt{3}N - 40N \approx -55{,}95(N)$$

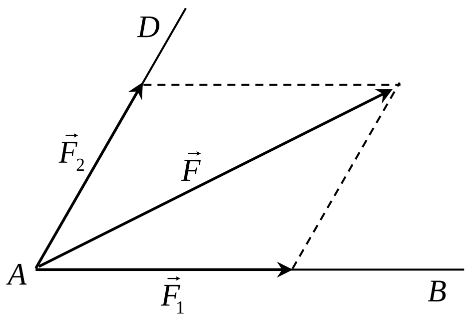
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \approx 60(N)$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = -0{,}038 \text{ , } \cos\beta = \frac{R_y}{R} = -0{,}932 \text{ .}$$

2.4. Güýji düzüjilere dargatmak.

Mehanikanyň meseleleri işlenende, käbir halatlarda güýji birnäçe düzüjilere dargatmaklyk amatly bolýar. Güýji birnäçe düzüjilere dargatmaklyk diýlip, deňtäsiredijisi berlen güýje deň bolan güýçler sistemasyny tapmaklyga düşünilýär.
Bu mesele kesgitlenmedik mesele bolup durýar we diňe käbir goşmaça şertler berlende anyk çözülýär. Iki sany hususy ýagdaýa seredip geçeliň.

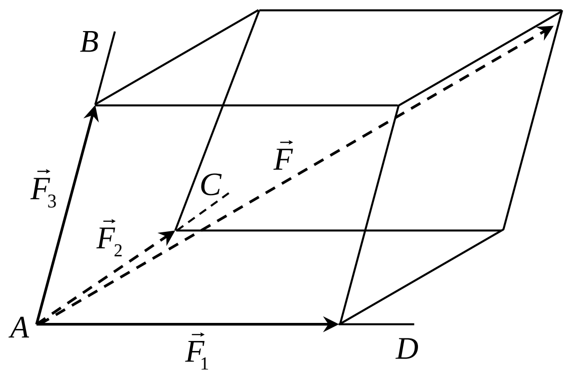
a) *Berlen güýji iki ugur boýunça dargatmak*. Bu meseläniň çözülişi taraplary berlen ugurlara parallel, berlen güýç bolsa diagonaly boýunça ugrukdyrylan parallelogramy gurmaklyga syrykýar. 2.4-nji suratda $\vec{F}$ güýjüň *AB* we *AD* ugurlar boýunça düzüjilere dargadylyşy görkezilen.



2.4-nji surat

$\vec{F}_1, \vec{F}_2 - \vec{F}$ güýjüň görkezilen ugurlar boýunça düzüjileri.

b) *Güýji görkezilen üç ugur boýunça dargatmak*. Eger berlen ugurlar bir tekizlikde ýatmaýan bolsa, onda, meseläniň çözülişi gapyrgalary berlen ugurlara parallel, berlen güýç bolsa diagonaly boýunça ugrukdyrylan parallelepipedi kesgitlemeklige syrykýar. 2.5-nji suratda $\vec{F}$ güýjüň *AB*, *AD*, *AC* ugurlar boýunça düzüjilere dargadylyşy görkezilen.



2.5-nji surat

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 - \vec{F}$ güýjüň görkezilen ugurlar boýunça düzüjileri.

§3. Ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.

1. **Deňagramlaşmagyň geometrik şerti.**
2. **Deňagramlaşmagyň analitikii şerti.**

Temanyň beýanyna başlamagymyzdan öň mehanikada wajyp düşünjeleriň biri bolan **baş wektor** düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Güýçler sistemasyna (umuman, wektorlar toplumyna) girýän güýçleriň (wektorlaryň) wektorlaýyn jemine sistemanyň (toplumyň) **baş wektory** diýilýär. $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasynyň baş wektoryny $\vec{R}$ bilen belgilesek, onda:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{3.1}$$

$\vec{R}$ wektory analitikii kesgitlemek üçin 2-nji paragrafyň (2.3) formulasyndan peýdalanalyň:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\ ,\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky},\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \tag{3.2}$$

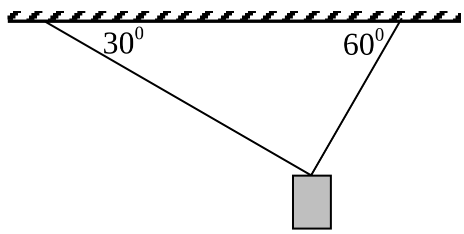
3.1. Deňagramlaşmagyň geometrik şerti.

Öň belläp geçişimiz ýaly (§1), ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi sistema girýän güýçleriň wektorlaýyn jemine, ýagny baş wektoryna deň.

Eger ýygnanýan güýçler sistemasy deňagramlaşan bolsa, onda onuň baş wektory nola deň bolmaly, ýagny $\vec{R} = \vec{0}$. Diýmek, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n\}$ ýygnanýan güýçler sistemasyna girýän güýçleri wektorlaýyn goşanymyzda netijede ýapyk köpburçluk alynmaly. Şeýlelik bilen, **ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin onuň baş wektorynyň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.**

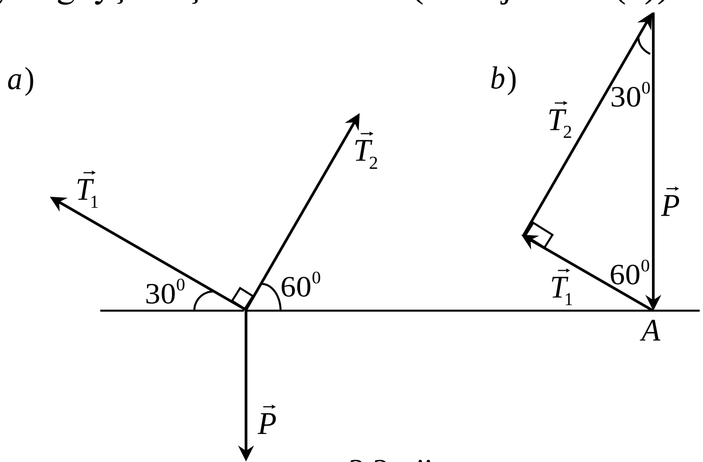
Bir mysala seredeliň.

Mysal. Agramy $P = 200N$ bolan jisim 3.1-nji suratda görkezilişi ýaly, wertikal tekizlikde ýüpler bilen asylan. Ýüpleriň dartyş güýçlerini kesgitlemeli.



3.1-nji surat

Çözülişi. Erkinleşdirmek taglymatyny ulanyp, jisimi baglanyşyklardan boşadalyň we jisime täsir edýän güýçleri şekillendireliň (3.2-nji surat (*a*)).



3.2-nji surat

$\vec{T}_1, \vec{T}_2$-ýüpleriň dartyş güýçleri, $\vec{P}$-jisimiň agramy. Deňagramlaşmak şerti boýunça

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

bolmaly. Güýçleri goşmak üçin olary A nokatdan yzygider alyp goýalyň (3.2nji surat(b)). Şeýlelikde, güýçler üçburçlugyny alarys. Bu üçburçluk üçin sinuslar teoremasyny ulanalyň:

$$\frac{T_1}{\sin 30^0} = \frac{P}{\sin 90^0} ,$$

bu ýerden: $T_1 = \dfrac{P}{\sin 90^0} \cdot \sin 30^0 = 200N \cdot \dfrac{1}{2} = 100N$

Şeýle-de,

$$\frac{T_2}{\sin 60^0} = \frac{P}{\sin 90^0} ,$$

bu ýerden: $T_2 = \dfrac{P}{\sin 90^0} \cdot \sin 60^0 = 200N \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 173N$

Jogaby: $T_1 = 100N$, $T_2 = 173N$.

3.2. Deňagramlaşmagyň analitikii şerti.

Baş wektoryň nola deň bolmaklygy üçin öňki paragrafda getirilen geometriýanyň teoremasyndan R_x, R_y we R_z ululyklaryň nola deň bolmalydygy gelip çykýar. Diýmek, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n\}$ ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (3.3)$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. (3.3) deňlik ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitikii şertidir.

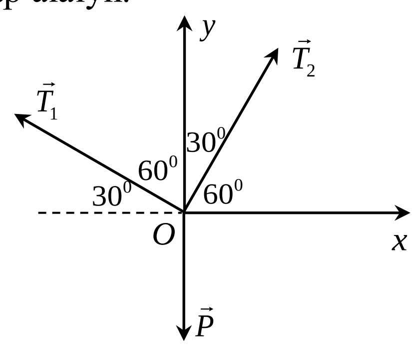
Bellik. Eger seredilýän güýçler sistemasy tekizlikde ýatýan bolsa, onda (3.3) şert

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad (3.4)$$

görnüşe eýe bolar.

Ýokarda işlenen mysaly deňagramlaşmagyň analitikii şertini ulanyp çözeliň. $\{\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{P}\}$-tekiz güýçler sistemasy.

Ox, *Oy* koordinata oklaryny 3.3-nji suratda görkezilişi ýaly (degişlilikde gorizontal we wertikal) saýlap alalyň.



3.3-nji surat

(3.4) deňligi ulanyp ýazarys:

$$\begin{cases} T_{1x} + T_{2x} + P_x = 0 \\ T_{1y} + T_{2y} + P_y = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Degişli proýeksiýalary hasaplalyň:

$$T_{1x} = -T_1 \cdot \cos 30^0 \qquad T_{1y} = T_2 \cdot \cos 60^0$$

$$T_{2x} = T_2 \cdot \cos 60^0 \qquad T_{2y} = T_2 \cdot \cos 30^0$$

$$P_x = 0 \qquad P_y = -P$$

Proýeksiýalary (*) deňlemede goýup, deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} -T_1 \cdot \cos 30^0 + T_2 \cdot \cos 60^0 = 0 \\ T_1 \cdot \cos 60^0 + T_2 \cdot \cos 30^0 - P = 0 \end{cases}$$

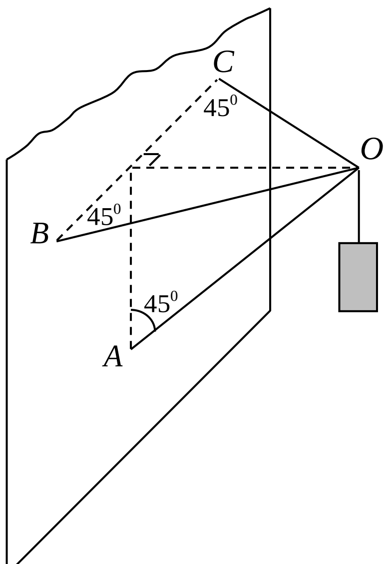
ýa-da

$$\begin{cases} T_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = T_2 \cdot \dfrac{1}{2} \\ T_1 \cdot \dfrac{1}{2} + T_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 200 \end{cases} \qquad (**)$$

Alnan (**) deňlemeler sistemasy ýeňillik bilen çözülýär, we netijede $T_1 = 100N$, $T_2 = 173N$ jogaby alarys.

Giňişlikdäki ýygnanýan güýçler sistemasynyň hem deňagramlaşmagyna degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Agramy 100*N* bolan jisim *A* nokatda şarnirli birikdirilen, wertikal bilen 45^0 burç emele getirýän *AO* steržen we iki sany gorizontal ýüpler bilen deňagramlykda saklanýar. $BO = CO$, $C\hat{B}O = B\hat{C}O = 45^0$. Steržendäki güýji we ýüpleriň dartyş güýçlerini kesgitlemeli.



3.4-nji surat

Çözülişi. Sistemany baglanyşyklardan erkinleşdirip, jisime täsir edýän güýçleri şekillendireliň (3.5-nji surat).

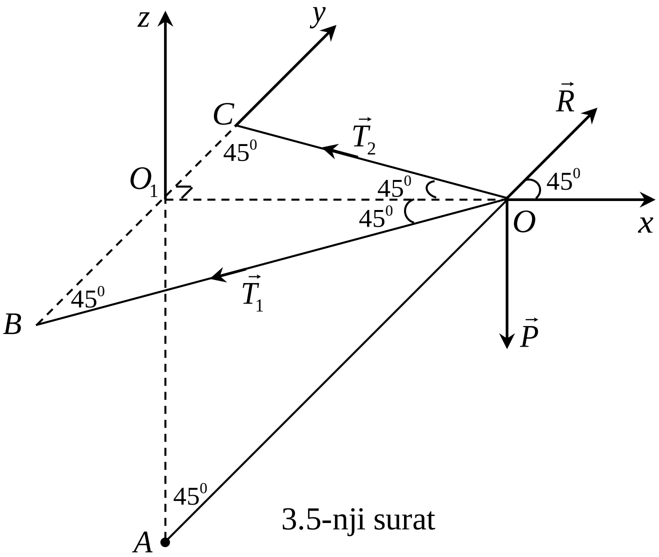
$\vec{P}$-jisimiň agramy (wertikal aşak ugrukdyrylan);

$\vec{T}_1, \vec{T}_2$-ýüpleriň dartyş güýçleri (ýüpler boýunça ugrukdyrylan);

$\vec{R}$-sterženiň reaksiýa güýji (steržen boýunça ugrukdyrylan).

$\{\vec{P},\vec{T}_1,\vec{T}_2,\vec{R}\}$-$O$ nokatda ýygnanýan deňagramlaşan güýçler sistemasy bolup durýar.

Koordinatalar oklaryny 3.5-nji suratda görkezilişi ýaly alyp, güýçleriň koordinatalaryny (oklar boýunça düzüjilerini) kesgitläliň.



3.5-nji surat

$$T_{1x} = -T_1 \cdot \cos 45^0 \qquad T_{2x} = -T_2 \cdot \cos 45^0$$
$$T_{1y} = -T_1 \cdot \sin 45^0 \qquad T_{2y} = T_2 \cdot \sin 45^0$$
$$T_{1z} = 0 \qquad T_{2z} = 0$$

$$R_x = R \cdot \cos 45^0 \qquad P_x = 0$$
$$R_y = 0 \qquad P_y = 0$$
$$R_z = R \cdot \sin 45^0 \qquad P_z = -P$$

Ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şertini ulanalyň:

$$\sum F_{kx} = 0 \qquad -T_1\frac{\sqrt{2}}{2} - T_2\frac{\sqrt{2}}{2} + R\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (*)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \qquad -T_1\frac{\sqrt{2}}{2} + T_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (**)$$

$$\sum F_{kz} = 0 \qquad R\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \qquad (***)$$

(***) deňlemeden $R = \frac{2P}{\sqrt{2}} = 141N$, (**) deňlemeden $T_1 = T_2$ bolýandygyny kesgitläris. Onda, (*) deňlemeden, alarys:

$$-2T_1\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2P}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{\sqrt{2}} \approx 71N$$

Şeýlelik bilen, $T_1 = T_2 = 71N$, $R = 141N$.

2-nji BAP
Parallel güýçler

§4. Iki sany parallel güýjüň goşulyşy.

Bu paragrafda parallel iki güýjüň goşulyşy, ýagny bu güýçleriň deňtäsiredijisiniň tapylyş usuly bilen tanyşarys.

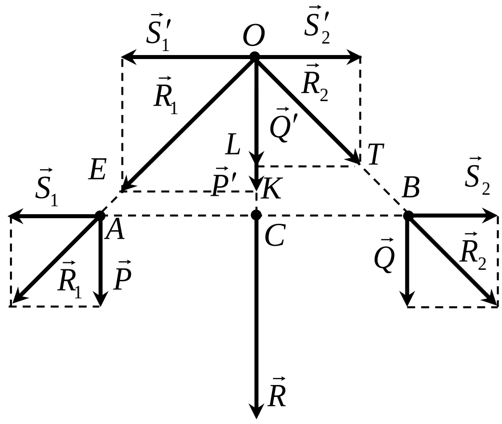
1. **Iki sany parallel ugurdaş güýjüň goşulyşy.**
2. **Iki sany parallel garşylykly güýjüň goşulyşy.**

4.1. Iki sany parallel ugurdaş güýjüň goşulyşy.

Parallel hem ugurdaş $\vec{P},\vec{Q}$ güýçlere seredeliň. *A*,*B*-degişlilikde $\vec{P},\vec{Q}$ güýçleriň täsir (goýlan) nokatlary.

A we *B* nokatlarda ululyklary boýunça deň, gapma-garşylykly ugrukdyrylan $\vec{S}_1$ we $\vec{S}_2$ güýçleri goýalyň (4.1-nji surat).

1-nji aksiomanyň esasynda $\{\vec{S}_1,\vec{S}_2\}$ deňagramlaşan güýçler sistemasydyr. Onda bu güýçler sistemasyny $\{\vec{P},\vec{Q}\}$ güýçler sistemasyna goşup bolýar, ýagny $\{\vec{P},\vec{Q}\}\sim\{\vec{P},\vec{Q},\vec{S}_1,\vec{S}_2\}$



4.1-nji surat

Güýçleri goşmak düzgünini ulanyp, $\vec{P}$ we $\vec{S}_1$ güýçleriň, şeýle-de $\vec{Q}$ we $\vec{S}_2$ güýçleriň deňtäsiredijilerini kesgitläliň. Şertli belgileme girizeliň:

$\vec{R}_1 - \vec{P},\vec{S}_1$ güýçleriň deňtäsiredijisi;

$\vec{R}_2 - \vec{Q},\vec{S}_2$ güýçleriň deňtäsiredijisi.

Onda $\{\vec{P},\vec{Q},\vec{S}_1,\vec{S}_2\}\sim\{\vec{R}_1,\vec{R}_2\}$

$\vec{R}_1,\vec{R}_2$ güýçleri bu güýçleriň täsir çyzyklarynyň kesişmesi bolan *O* nokada göçüreliň. Soňra $\vec{R}_1$ güýji $\vec{P},\vec{S}_1$ güýçlere parallel, $\vec{R}_2$ güýji $\vec{Q},\vec{S}_2$ güýçlere parallel düzüjilere dargadalyň.

O nokatda ýygnanýan $\vec{P}',\vec{S}_1',\vec{Q}',\vec{S}_2'$ güýçleri aldyk. *A*,*B* we *O* nokatda gurlan parallelogramlaryň jübüt-jübütden deňligi sebäpli $\vec{P}',\vec{S}_1',\vec{Q}'$ we $\vec{S}_2'$ güýçler modullary boýunça degişlilikde P, S_1, Q we S_2 ululyklara deň. Şeýlelik bilen, iki sany parallel güýç *O* nokatda ýygnanýan dört sany güýje getirildi.

Ululyklary deň, garşylykly ugrukdyrylan $\vec{S}_1', \vec{S}_2'$ güýçleri ikinji aksiomanyň esasynda aýryp bileris. Netijede bir göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan ugurdaş $\vec{P}'$ we $\vec{Q}'$ güýçler galýar. Bu güýçleriň deňtäsiredijisi $\vec{R}$ güýç hem şol göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan, ululygy boýunça $\vec{P}'$ we $\vec{Q}'$ güýçleriň jemine deň, $R = P' + Q' = P + Q$

Indi deňtäsiredijiniň täsir çyzygynyň nireden geçýändigini kesgitläliň. Munuň üçin bu täsir çyzygyň *AB* kesim bilen kesişmesi bolan *C* nokady tapalyň.

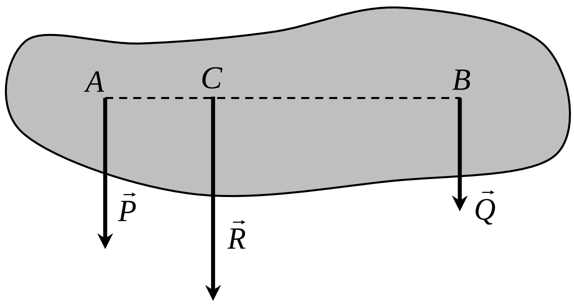
OAC we *OEK* üçburçluklaryň meňzeşliginden $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{EK}{OK}$ deňligi alarys. Bu deňlikden $\vec{S}_1, \vec{P}$ güýçleriň ululyklarynyň san taýdan degişlilikde *EK*,*OK* kesimleriň uzynlyklaryna deňligi sebäpli, $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{S_1}{P}$ deňlige geleris.

OCB we *OLT* üçburçluklaryň meňzeşliginden $\dfrac{CB}{OC} = \dfrac{LT}{OL}$ ýa-da $\dfrac{CB}{OC} = \dfrac{S_2}{Q}$ deňlige geleris. Alnan deňlikleri gatnaşdyryp we $S_1 = S_2$ deňligi göz öňünde tutup, taparys: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{Q}{P}$

1-nji netije. Parallel (ugurdaş) iki sany $\vec{P}, \vec{Q}$ güýjüň deňtäsiredijisi bolan $\vec{R}$ güýç ululygy boýunça bu güýçleriň jemine deň, ugry boýunça $\vec{P}, \vec{Q}$ güýçlere parallel we olar bilen ugurdaş; täsir nokady *AB* kesimi içki usul bilen P, Q güýçlere ters proporsional gatnaşykda bölýär.

$$R = P + Q \qquad (4.1)$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P} \qquad (4.2)$$



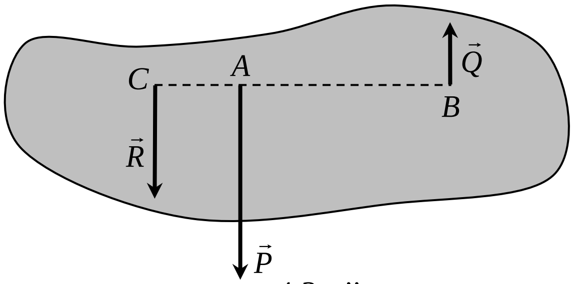
4.2-nji surat

4.2. Iki sany parallel garşylykly güýjüň goşulyşy.

Goý, *A*,*B* nokatlarda parallel we gapma-garşylykly ugrukdyrylan $\vec{P}, \vec{Q}$ güýçler goýlan bolsun. Takyklylyk üçin $P > Q$ bolsun.

Ýokarda getirilen amallara meňzeş amallardan soň şeýle netijä geleris:

2-nji netije. Ululyklary boýunça deň bolmadyk ters ugurly iki sany güýç deňtäsiredijä getirilýär. Deňtäsiredijiniň ululygy güýçleriň tapawudyna deň, güýçleriň ulusy bilen ugurdaş. Deňtäsiredijiniň täsir nokady AB kesimiň uly güýje tarap dowamynda ýatyp, AB kesimi daşky usul bilen P, Q güýçlere ters proporsional gatnaşykda bölýär.



$(P > Q)$

4.3-nji surat

$$R = P - Q \qquad (4.3)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P} \qquad (4.4)$$

§5. Jübüt güýçler.

1. **Jübüt güýçler. Jübütiň momenti.**
2. **Jübütleriň deňgüýçlüligi we jübütleri goşmak hakynda teoremalar.**
3. **Jübütler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.**

5.1. Jübüt güýçler. Jübütiň momenti.

4-nji paragrafda getirilen ters ugurly $\vec{P}, \vec{Q}$ güýçleriň deňtäsiredijisini tapmak usuly bu güýçleriň ululyklary deň bolanda ulanmak bolanok. Dogrudanam, bu paragrafda getirilen $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$ formulany özgerdip ýazalyň.

4.3-nji suratdan görnüşi ýaly, $BC = AC + AB$, 4.3-nji formuladan $P = R + Q$. Onda $\frac{AC}{AC + AB} = \frac{Q}{R + Q}$ ýa-da $\frac{AC + AB}{AC} = \frac{R + Q}{Q}$,

bu ýerden

$$1 + \frac{AB}{AC} = \frac{R}{Q} + 1$$

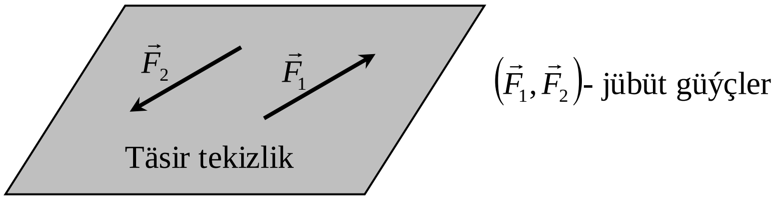
$$AC = \frac{AB \cdot Q}{R} \qquad (*)$$

Diýmek, eger $\vec{P}$ güýjüň ululygy $\vec{Q}$ güýjüň ululygyna tükeniksiz ýakynlaşsa, onda $R = P - Q$ deňtäsirediji nola ymtylýar we (*) deňlikden görnüşi ýaly $\vec{R}$ güýjüň täsir (goýlan) nokady A nokatdan tükeniksiz daşlaşýar $(AC \to \infty)$.

Bellik. Ululyklary deň, garşylykly ugrukdyrylan güýçleriň wektorlaýyn jemi nola deň. Emma bu güýçler deňagramlaşanok. Sebäbi 1-nji aksioma boýunça iki güýjüň deňagramlaşmagy üçin olaryň deň we bir göni çyzykda gapma-garşylykly ugrukdyrylan bolmagy hökmanydyr.

Şu ýerde jübüt güýçleriň kesgitlemesini getireliň.

Kesgitleme. Ululyklary deň, garşylykly ugrukdyrylan, bir göni çyzykda ýatmaýan iki sany $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçden ybarat sistema **jübüt güýçler** diýilýar. Jübüt güýçler $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ ýaly belgilenýär.
Kesgitleme. Jübüti düzýän güýçleriň täsir çyzyklarynyň üstünden geçýän tekizlige jübüt güýçleriň täsir tekizligi diýilýär.

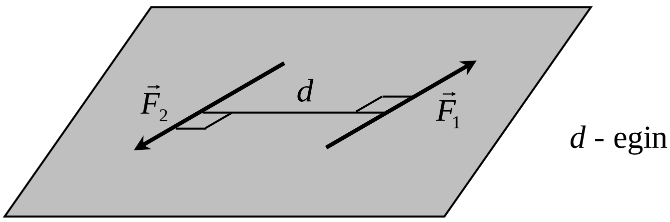


5.1-nji surat

Bellik. Mundan beýläk “jübüt güýçlere” diňe “jübüt” diýiljekdir.
Bellik. Jübüt deňtäsiredijä getirilmeýär we şu sebäpli bir güýç bilen deňagramlaşdyrylmaýar.

Tejribäniň görkezişi ýaly, jisime täsir edýän jübüt ony aýlaw hereketine getirýär. Jübütiň jisimi aýlamaga ukyby onuň momenti bilen kesgitlenýär.

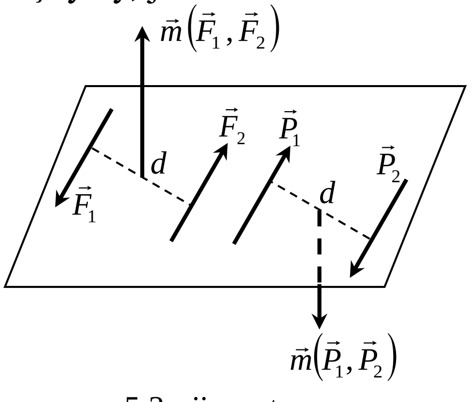
Jübütiň egni, soňra jübütiň momenti düşünjelerini girizeliň.
Kesgitleme. Jübüte girýän güýçleriň täsir çyzyklarynyň arasyndaky uzaklyga jübütiň egni diýilýär.



5.2-nji surat

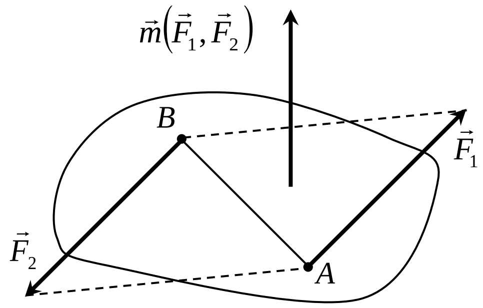
Kesgitleme. $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ jübütiň momenti $\vec{m}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ wektor jübütiň täsir tekizligine perpendikulýar, uzynlygy $F \cdot d$ $\left(F = F_1 = F_2\right)$ ululyga deň. Bu wektoryň öňünden seredeniňde jübüt jisimi sagat diliniň hereketiniň hereketiniň tersine aýlamaga çalyşýan ýagdaýda görünmeli.

Kesgitlemesinden görnüşi ýaly, jübütiň momentiniň ölçeg birligi $N \cdot m$ bolar.



5.3-nji surat

Goý, A we B degişlilikde $\vec{F}_1$ we $\vec{F}_2$ güýçleriň goýlan nokatlary bolsun.



5.4-nji surat

$\vec{m}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ momentiň moduly $(F \cdot d)$ AB kesimiň we $\vec{F}_1$ ýa-da $\vec{F}_2$ güýji şekillendirýän kesimiň üstünde gurlan üçburçlugyň meýdanynyň iki essesine deň. Wektorlaryň wektorlaýyn köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden alarys:

$$\vec{m}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}_2=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}_1 \tag{5.1}$$

5.2. Jübütleriň deňgüýçlüligi we jübütleri goşmak hakynda teoremalar.

Jübütlere degişli aşakda getirilen teoremalary subutsyz kabul edeliň.

1-nji teorema. Jübüt täsir tekizliginde göçürilende onuň gaty jisime edýän täsiri üýtgemeýär.

2-nji teorema. Jübüt täsir tekizligine parallel tekizlige göçürilende onuň jisime edýän täsiri üýtgemeýär.

3-nji teorema. Jübütiň momentini üýtgetmän, jübüte girýän güýçleriň ululygy, jübütiň egni üýtgedilende jübütiň jisime edýän täsiri üýtgemeýär.

4-nji teorema. Jübütler sistemasy momenti sistema girýän jübütleriň momentleriniň wektorlaýyn jemine deň bolan bir jübüte deňgüýçlüdir. Ýagny

$$\{(\vec{F}_1,\vec{F}_1'),(\vec{F}_2,\vec{F}_2'),\ldots,(\vec{F}_N,\vec{F}_N')\}$$

jübütler sistemasy $(\vec{F},\vec{F}')$ deňtäsiredijä getirilýär. Şeýlelikde,

$$\vec{m}(\vec{F},\vec{F}')=\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_k \ , \tag{5.2}$$

bu ýerde, $\vec{m}_k - (\vec{F}_k,\vec{F}_k')$ jübütiň momenti.

5.3. Jübütler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.

Ýokarda bellenilip geçilişi ýaly, jübütler sistemasy momenti sistema girýän jübütleriň momentleriniň jemine deň bolan bir jübüte getirilýär. Diýmek, jübütler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin sistema girýän jübütleriň momentleriniň jemi nola deň bolmaly. Ýagny

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_k=\vec{0} \tag{5.3}$$

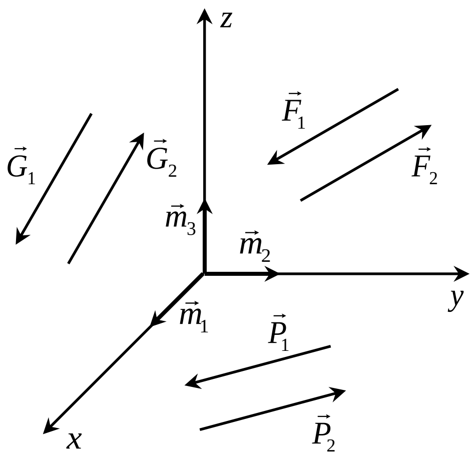
ýa-da analitikii görnüşde ýazsak

$$\sum_{k=1}^{n}m_{kx}=0 \ , \ \sum_{k=1}^{n}m_{ky}=0 \ , \ \sum_{k=1}^{n}m_{kz}=0 \tag{5.4}$$

şert ýerine ýetmeli. Jübütleriň goşulyşyna degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. $\{(\vec{F}_1,\vec{F}_2),(\vec{G}_1,\vec{G}_2),(\vec{P}_1,\vec{P}_2)\}$ jübütler sistemasynyň deňtäsiredijisini kesgitlemeli.

$$F_1 = F_2 = 10N \quad (d = 0{,}5m)\,,\ (\vec{F}_1,\vec{F}_2) \text{ - } zy \text{ tekizlikde;}$$
$$G_1 = G_2 = 20N \quad (d = 0{,}2m)\,,\ (\vec{G}_1,\vec{G}_2) \text{ - } xz \text{ tekizlikde;}$$
$$P_1 = P_2 = 30N \quad (d = 0{,}1m)\,,\ (\vec{P}_1,\vec{P}_2) \text{ - } xy \text{ tekizlikde.}$$



5.5-nji surat

Çözülişi.

$$\vec{m}_1 = (F_1 \cdot d, 0, 0) = (5, 0, 0) - (\vec{F}_1,\vec{F}_2) \text{ jübütiň momenti;}$$
$$\vec{m}_2 = (0, G_1 \cdot d, 0) = (0, 4, 0) - (\vec{G}_1,\vec{G}_2) \text{ jübütiň momenti;}$$
$$\vec{m}_3 = (0, 0, P_1 \cdot d) = (0, 0, 3) - (\vec{P}_1,\vec{P}_2) \text{ jübütiň momenti.}$$

Onda jemleýji jübütiň momenti $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 = (5, 4, 3)$

Bu momentiň moduly, $|\vec{m}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}(N \cdot m)$.

3-nji BAP
Güýçler sistemasynyň merkeze getirilişi

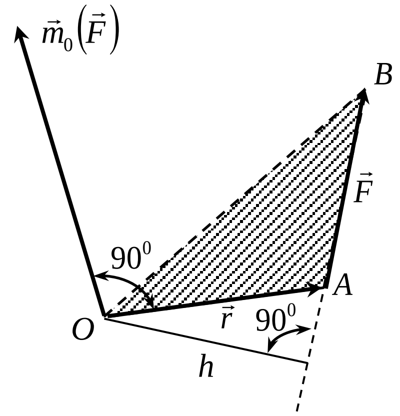
§6. Güýjüň momenti.

1. **Güýjüň nokada görä momenti.**
2. **Güýjüň oka görä momenti.**
3. **Güýjüň nokada görä we bu nokatdan geçýän oka görä momentleriniň arasyndaky baglanyşyk.**

6.1. Güýjüň nokada görä momenti.

Mehanikanyň wajyp düşunjeleriniň biri bolan *güýjüň nokada görä momenti* düşünjesini girizeliň.

Jisimiň A nokadynda goýlan $\vec{F}$ güýje seredeliň. O-giňişlikde alnan erkin nokat.



6.1-nji surat

Kesgitleme. O nokatdan $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygyna inderilen perpendikulýar kesimiň uzynlygyna $\vec{F}$ **güýjüň O nokada görä egni** diýilýär.

Moment düşunjesini girizeliň:

Kesgitleme. $\vec{F}$ güýjüň O nokada görä momenti $\vec{m}_0(\vec{F})$ wektor O nokatda goýlan, moduly boýunça güýjüň ululygynyň onuň egnine köpeltmek hasylyna deň $(F \cdot h)$, $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygynyň we O nokadyň üstünden geçýän tekizlige (6.1-nji suratda OAB tekizlik) perpendikulýar. Şeýlelikde, $\vec{m}_0(\vec{F})$ wektoryň öňünden seredeniňde $\vec{F}$ güýç jisimi O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine aýlamaga çalyşýan ýagdaýda görünmeli.

Bu kesgitlemä laýyklykda:

$$\left|m_0(\vec{F})\right| = F \cdot h = 2 \cdot S_{\Delta OAB}\ , \tag{6.1}$$

$\vec{m}_0(\vec{F})$ wektory kesgitleýän aňlatmany tapalyň.

Wektorlaýyn köpeltmek hasylynyň kesgitlemesi boýunça $\left|\overrightarrow{OA} \times \vec{F}\right| = 2 \cdot S_{\Delta OAB}$

Şeýle hem, $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ wektor OAB tekizlige perpendikulýar we bu wektoryň öňünden seredeniňde $\overrightarrow{OA}$ wektordan $\vec{F}$ wektora ýakyn geçelge (bu wektorlar A nokatdan alnyp goýlanda) sagat diliniň hereketiniň aýlawynyň tersine bolup geçmeli.

Diýmek, $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ we $\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)$ wektorlar modullary we ugurlary boýunça deň. Onda $\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ ýa-da

$$\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F} \tag{6.2}$$

Ýagny $\vec{F}$ **güýjüň *O* nokada görä momenti, *O* nokatdan $\vec{F}$ güýjüň goýlan nokadyna geçirilen radius-wektoryň bu güýje wektorlaýyn köpeltmek hasylyna deň.**

Koordinatalar başlangyjyny O nokatda alalyň. Goý, $\vec{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$ güýjüň goýlan nokadynyň (A) koordinatalary (x,y,z) bolsun. Onda:

$$\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \tag{6.3}$$

Bu ýerden $\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)$ wektoryň düzüjileri üçin

$$\begin{cases} m_{0x}=y\cdot F_z-z\cdot F_y\\ m_{0y}=z\cdot F_x-x\cdot F_z\\ m_{0z}=x\cdot F_y-y\cdot F_x\end{cases} \tag{6.4}$$

deňlikleri alarys.

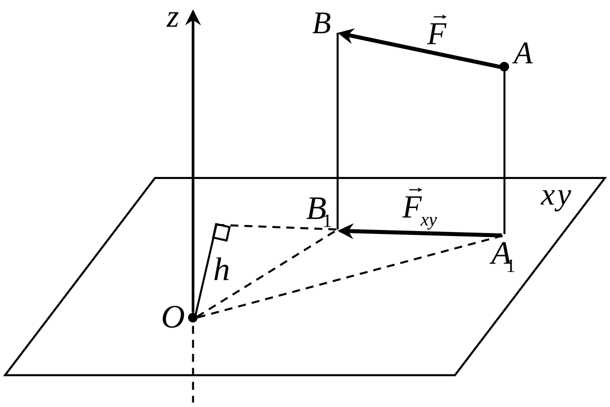
Bellik. Güýjüň nokada görä momenti güýjüň jisimi bu nokadyň daşynda aýlamaga ukybyny häsiýetlendirýär.

Kesgitlemesinden görnüşi ýaly, momentiň ölçeg birligi $N\cdot m$ bolar.

6.2. Güýjüň oka görä momenti.

Güýjüň jisimi okuň daşyndan aýlamaga bolan ukybyny häsiýetlendirýän ululygy, ýagny güýjün oka görä momenti düşunjesini girizeliň.

$\vec{F}$ güýje we z oka seredeliň. z oka perpendikulýar xy tekizligini alalyň. O-z ok bilen xy tekizligiň kesişme nokady.



6.2-nji surat

$\vec{F}$ güýji xy tekizlige proýektirläliň, $\vec{F}_{xy}-\vec{F}$ güýjüň proýeksiýasy.

Kesgitleme. $\vec{F}_{xy}$ güýjüň O nokada görä momentiniň algebraik bahasyna, ýagny

$$m_z\left(\vec{F}\right)=\pm F_{xy}\cdot h \tag{6.5}$$

ululyga $\vec{F}$ güýjüň z oka görä momenti diýilýär. Şeýlelikde, kesgitlilik üçin z okuň öňünden seredeniňde $\vec{F}_{xy}$ wektor O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanmaga ymtylsa moment položitel, ugruna aýlanmaga ymtylsa moment otrisatel hasaplanýar.

(6.5) formuladan görnüşi ýaly,

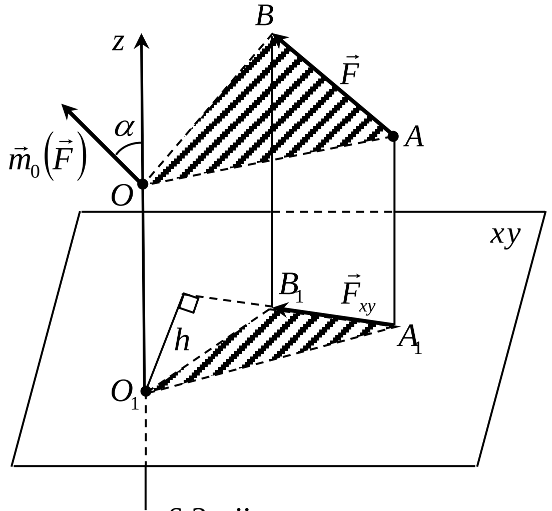
$$\left|m_z\left(\vec{F}\right)\right| = F_{xy} \cdot h = 2 \cdot S_{\Delta OA_1B_1} \tag{6.6}$$

Bellik. $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygy z oka parallel bolsa ýa-da z ok bilen kesişýän bolsa, onda $\vec{F}$ güýjüň z oka görä momenti nola deň.

6.3. Güýjüň nokada görä we bu nokatdan geçýän oka görä momentleriniň arasyndaky baglanyşyk.

$\vec{F}$ güýje we z oka seredeliň. O-z okuň üstünde erkin alnan nokat. xy-z oka perpendikulýar tekizlik. O_1-z okuň xy tekizligi kesýän nokady.

Belli bolşy ýaly, $\vec{F}$ güýjüň O nokada görä momenti $\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)$ wektor O nokatda goýlan, OAB tekizlige perpendikulýar, moduly boýunça $2S_{\Delta OAB}$ deň. Seýle-de, bu wektoryň öňünden seredeniňde $\vec{F}$ güýç O nokadyň daşyndan sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanmaga çalyşmaly.



6.3-nji surat

Şertli belgileri girizeliň:

$\alpha - \vec{m}_0\left(\vec{F}\right)$ wektor bilen z okuň položitel ugrunyň arasyndaky burç;

$m_{Oz} - \vec{m}_0\left(\vec{F}\right)$ wektoryň z oka proýeksiýasy.

Onda OAB üçburçlugyň tekizligi bilen xy tekizligiň arasyndaky burçuň hem α-a deňdigini ulanyp taparys:

$$\left|m_{Oz}\right| = \left|\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)\right| \cdot \cos\alpha = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos\alpha = 2S_{\Delta O_1A_1B_1} = \left|\vec{m}_z\left(\vec{F}\right)\right|$$

Diýmek, m_{Oz} we $m_z\left(\vec{F}\right)$ ululyklar modullary boýunça deň. Emma bu ululyklaryň alamatlary hem deň, ýagny $m_{Oz} > 0$ bolsa, $m_z\left(\vec{F}\right) > 0$, $m_{Oz} < 0$ bolsa, $m_z\left(\vec{F}\right) < 0$.

Şeýlelik bilen, $m_{Oz} = m_z\left(\vec{F}\right)$ ýa-da

$$\left[\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)\right]_z = m_z\left(\vec{F}\right) \tag{6.7}$$

Alnan deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

Teorema. Güýjüň nokada görä momentiniň bu nokatdan geçýän oka proýeksiýasy güýjüň şu oka görä momentine deň.

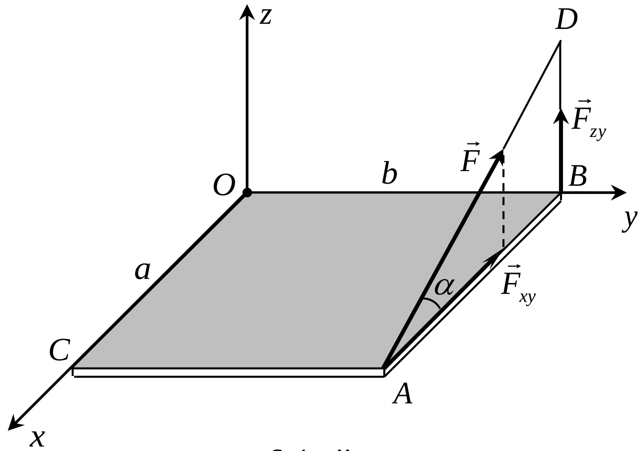
(6.4) formulanyň esasynda (x, y, z) koordinataly nokatda goýlan $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ güýjüň koordinata oklaryna görä momentleri üçin

$$\begin{cases} m_x(\vec{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y \\ m_y(\vec{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ m_z(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{cases} \tag{6.8}$$

deňlikleri alarys.

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. 6.4-nji suratda görkezilen plita täsir edýän $\vec{F}$ güýjüň koordinata oklaryna görä momentlerini hasaplamaly. $\vec{F}$ // xz



6.4-nji surat

Çözülişi. $\vec{F}$ güýjüň x oka görä momentini hasaplamak üçin $\vec{F}$ güýji zy tekizlige proýektirläliň:

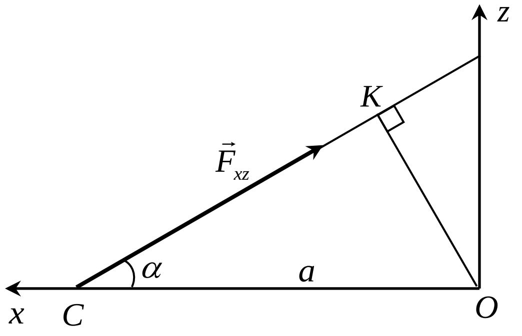
$$F_{zy} = F \cdot \sin\alpha$$

$\vec{F}_{zy}$ güýjüň egni b-e deň, x okunyň öňünden seredeniňde $\vec{F}_{xy}$ güýç O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanmaga ymtylýar. Diýmek, $m_x(\vec{F}) = F \cdot \sin\alpha \cdot b$.

$m_y(\vec{F})$ ululygy hasaplalyň.

$\vec{F}$ güýç xz tekizlige parallel ABD tekizlikde ýatýar, diýmek, $F_{xz} = F$.

$\vec{F}_{xz}$ güýjüň egnini hasaplamak üçin goşmaça çyzgy edeliň.



6.5-nji surat

(6.5)-nji suratdan görnüşi ýaly, $\vec{F}_{xy}$ güýjüň egni, $OK = a \cdot \sin\alpha$. Şeýle hem, y okunyň öňünden seredilende $\vec{F}_{xy}$ güýç O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň ugruna aýlanmaga ymtylýar, diýmek, $m_y(\vec{F}) = -F \cdot a \cdot \sin\alpha$.

$m_z(\vec{F})$ ululygy hasaplamak üçin $\vec{F}$ güýji xy tekizlige proýektirläliň:

$$F_{xy} = F \cdot \cos\alpha$$

$\vec{F}_{xy}$ güýjüň O nokada görä egni b-e deň. Şeýle-de, z okuň öňünden seredeniňde $\vec{F}_{xy}$ güýç O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanmaga ymtylýar, diýmek, $m_z(\vec{F}) = F \cdot b \cdot \cos\alpha$.

Bellik. Bu mysaly (6.8) formula bilen hem işläp bolýar. Ýagny

$(a, b, 0)$-güýjüň goýlan nokady;

$F_x = -F \cdot \cos\alpha$, $F_y = 0$, $F_z = F \cdot \sin\alpha - \vec{F}$ güýjüň düzüjileri.

Bu ululyklary (6.8) formulada ýerine goýup, ýene-de

$$m_x(\vec{F}) = F \cdot \sin\alpha \cdot b,\ m_y(\vec{F}) = -F \cdot a \cdot \sin\alpha,\ m_z(\vec{F}) = F \cdot b \cdot \cos\alpha$$

netijeleri alarys.

§7. Güýçler sistemasynyň merkeze getirilişi.

1. **Güýji parallel göçürmek barada lemma[3] (Puansonyň lemmasy).**
2. **Güýçler sistemasynyň merkeze getirlişi. Baş wektor, baş moment.**
3. **Güýçler sistemasynyň merkeze getirilşiniň käbir hususy ýagdaýlary.**
4. **Güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti. Warinýonyň teoremasy.**

7.1. Güýji parallel göçürmek barada lemma (Puansonyň lemmasy).

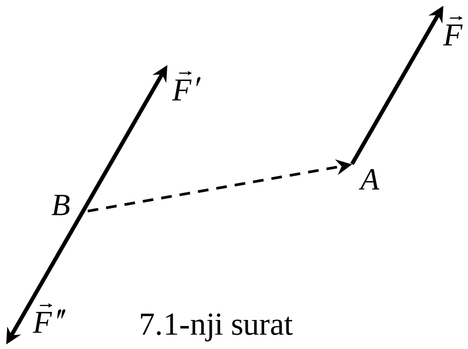
Güýçler sistemasyny berlen merkeze getirmekde esas bolup durýan Puansonyň lemmasyny getireliň.

Puanso (Poinsot) Lui (1777-1859), fransuz matematigi. Mehaniki sistemalary öwrenmekligiň geometrik usullaryny kesgitlän, jübütleriň esasynda geometrik statikanyň düýbüni tutan, inersiýa ellipsoidi düşünjesini ilkinji bolup girizen alym.

[3] Lemma-arap sözi, kiçeňräk teorema (jümle) diýmek.

Puansonyň lemmasy. Jisime täsir edýän güýji jisime edýän täsirini üýtgetmezden, momenti güýjüň göçürilýän nokadyna görä momentine deň bolan jübüti goşup jisimiň başga bir nokadyna göçürip bolýar.

Subudy. Goý, $\vec{F}$ güýç jisimiň A nokadyna täsir edýän bolsun. Jisimiň B nokadynda $\vec{F}$ güýje parallel, gapma-garşylykly ugrukdyrylan, ululyklary boýunça F güýje deň bolan $\vec{F}', \vec{F}''$ güýçleri goýalyň. Munuň bilen $\vec{F}$ güýjüň täsiri üýtgemeýär (2-nji aksioma).



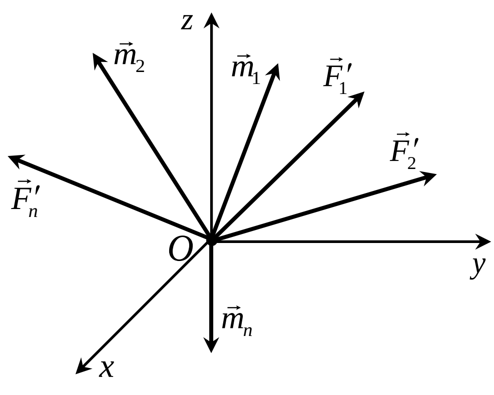
7.1-nji surat

Ýagny $\vec{F} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$. Emma $\vec{F}$ we $\vec{F}''$ güýçler jübüti emele getirýärler. Diýmek, $\vec{F} \sim \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\}$. Belli bolşy ýaly (§5), $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}'') = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$. Başga tarapdan, $\overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \vec{m}_B(\vec{F})$. Şeýlelik bilen, $\vec{F} \sim \{\vec{F}', \vec{m}\}$. Bu ýerde $\vec{m}$-momenti $\vec{F}$ güýjüň B nokada görä momentine deň bolan jübüt. Lemma subut edildi.

7.2. Güýçler sistemasynyň merkeze getirilişi. Baş wektor, baş moment.

Goý, jisime $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasy täsir edýän bolsun. Erkin O nokady getirme merkez hökmünde kabul edeliň.

Puansonyň lemmasynyň esasynda her bir $\vec{F}_k$ güýji momenti bu güýjüň O nokada görä momentine deň bolan jübüti goşup, O nokada göçureliň. Netijede O nokatda ýygnanýan $\{\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n'\}$ güýçler sistemasyny hem-de $\{\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n\}$ jübütler sistemasyny alarys. Bu ýerde $\vec{m}_k$-momenti $\vec{m}_O(\vec{F}_k)$ deň bolan jübüt.



7.2-nji surat

Belli bolşy ýaly (§3), ýygnanýan güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi bu sistema girýän güýçleriň wektorlaýyn jemine deň, $\vec{R} = \sum \vec{F}_k'$ ýa-da

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k \tag{7.1}$$

Şeýle-de, jübütler sistemasynyň deňtäsiredijisi momenti sistema girýän jübütleriň momentleriniň jemine deň bolan jübüt bolup durýar (§5). Ýagny

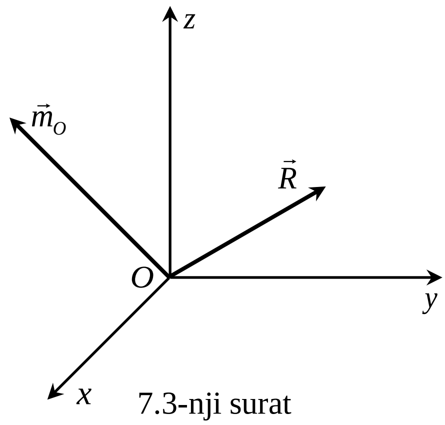
$$\vec{m}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) \tag{7.2}$$
momentli jübüt.

Güýçler sistemasynyň baş wektory, baş momenti ýaly düşunjeleri girizeliň.

Kesgitleme. Güýçler sistemasyna girýän güýçleriň jemine, ýagny $\vec{R}$ wektora sistemanyň **baş wektory** diýilýär.

Kesgitleme. Sistema girýän güýçleriň O nokada görä momentleriniň jemine, ýagny $\vec{m}_O$ wektora sistemanyň O nokada görä **baş momenti** diýilýär.

Şeýlelik bilen, gaty jisime täsir edýän güýçler sistemasy berlen O merkeze getirilende, O nokatda goýlan güýçler sistemasynyň baş wektoryna deň bolan $\vec{R}$ güýje we sistemanyň O nokada görä baş momentine deň, $\vec{m}_O$ momentli jübüt bilen çalşyrylýar, ýagny $\left\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right\} \sim \left\{\vec{R}, \vec{m}_O\right\}$



7.3-nji surat

Bellik. $\vec{R}$ wektor saýlanylýan merkeze, ýagny O nokada bagly däl.

O nokadyň orny üýtgände, güýçleriň bu nokada görä momentleriniň üýtgeýändigi sebäpli, umumy ýagdaýda $\vec{m}_O$ wektor üýtgeýär. Şu sebäpli baş momentiň haýsy nokada görä kesgitlenýandigini hökman aýdyňlaşdyrmaly.

(7.1) deňligi koordinata oklaryna proýektirläp, baş wektory analitikii kesgitlemek üçin

$$R_x = \sum F_{kx}\ ,\ R_y = \sum F_{ky}\ ,\ R_z = \sum F_{kz} \tag{7.3}$$

formulany alarys. Şeýle-de, (7.2) formulany koordinata oklaryna proýektirläp, güýjüň nokada görä momentiniň bu nokatdan geçýän oka proýeksiýasynyň güýjüň bu oka görä momentine deňdigini göz öňünde tutup, baş momenti kesgitlemek üçin

$$\begin{cases} m_{Ox} = \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) \\ m_{Oy} = \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) \\ m_{Oz} = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) \end{cases} \tag{7.4}$$

formulany alarys.

7.3. Güýçler sistemasynyň merkeze getirilişiniň käbir hususy ýagdaýlary.

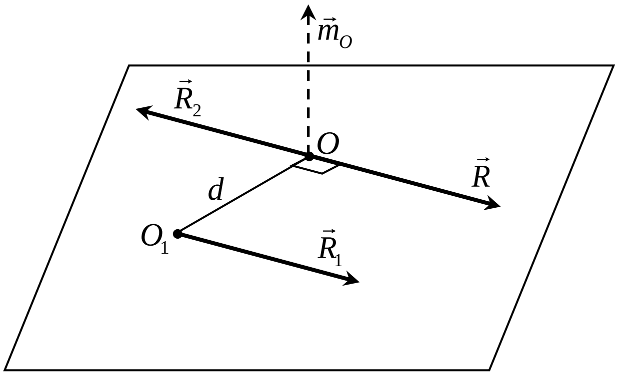
Ýokarda görkezilişi ýaly, umumy ýagdaýda güýçler sistemasy güýçler sistemasynyň baş wektoryna deň bolan $\vec{R}$ güýje we momenti güýçler sistemasynyň saýlanan (O) merkeze görä $\vec{m}_O$ baş momentine deň bolan jübüte getirilýär. Deňagramlaşmadyk güýçler sistemasy ýönekeýleşdirlende ýüze çykyp biljek hususy ýagdaýlara seredip geçeliň.

1. Eger $\vec{R}=\vec{0}, \vec{m}_O \neq \vec{0}$ bolsa, onda güýçler sistemasy $\vec{m}_O$ momentli jübüte getirilýär; $\vec{m}_O$ moment (7.4) formula bilen kesgitlenýär.

2. Eger $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{m}_O = \vec{0}$ bolsa, onda güýçler sistemasy täsir çyzygy O nokatdan geçýän $\vec{R}$ deňtäsiredijä getirilýär. $\vec{R}$ güýç (7.3) formula bilen kesgitlenýär.

3. Eger $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{m}_O \neq \vec{0}$ we $\vec{m}_O \perp \vec{R}$ bolsa, onda güýçler sistemasy täsir çyzygy O nokatdan geçmeýän $\vec{R}$ deňtäsiredijä getirilýär. Hakykatdan hem, $\vec{m}_O \perp \vec{R}$ bolsa, $\vec{m}_O$ momentli jübüt we $\vec{R}$ güýç bir tekizlikde ýatýarlar.

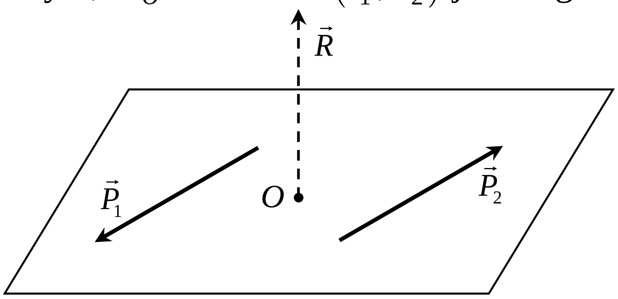
$\vec{m}_O$ momentli jübüti düzýän $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ güýçleriň ululyklaryny R-e deň edip alalyň we bu jübüti 7.4-nji suratda görkezilişi ýaly ýerleşdireliň.



7.4-nji surat

Elbetde, $\vec{R}$ we $\vec{R}_2$ güýçler deňagramlaşar $\left(\vec{R}_2 = -\vec{R}\right)$. Netijede güýçler sistemasy täsir çyzygy O_1 nokatdan geçýän $\vec{R}_1 = \vec{R}$ güýje getirilýär; OO_1 $\left(OO_1 \perp \vec{R}\right)$ kesimiň uzynlygy $OO_1 = \dfrac{m_O}{R}$ deňlikden alynýar.

4. Eger $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{m}_O \neq \vec{0}$ we $\vec{m}_O \,//\, \vec{R}$ bolsa, onda güýçler sistemasy $\vec{R}$ güýje we täsir tekizligi $\vec{R}$-e perpendikulýar, $\vec{m}_O$ momentli $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ jübüte getirilýär. (7.5-nji surat).



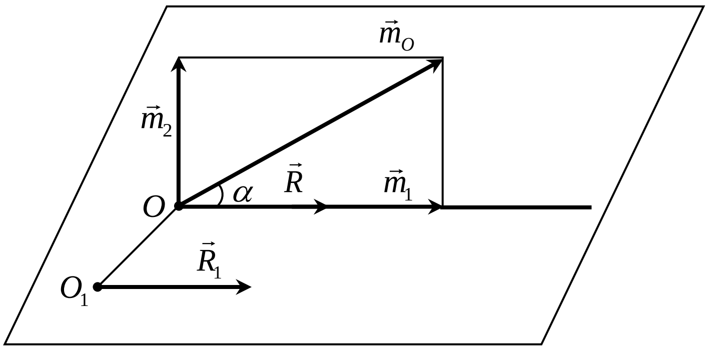
7.5-nji surat

$\vec{R}$ güýçden we $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right)$ jübütden ybarat bolan sistema **dinamiki wint** diýilýär.

$\vec{R}$ güýjüň täsir çyzygyna bolsa wintiň oky diýilýär.

5. Eger $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{m}_O \neq \vec{0}$ şeýle-de, $\vec{R}, \vec{m}_O$ wektorlar parallel hem däl, perpendikulýar hem däl bolsa, onda güýçler sistemasy dinamiki winte getirilýär, ýöne dinamiki wintiň oky O nokatdan geçmeýär.

Hakykatdan hem, $\vec{m}_O$ wektory iki düzüjä böleliň: $\vec{m}_1 - \vec{R}$ güýjüň täsir çyzygy boýunça ugrukdyrylan, $\vec{m}_2 - \vec{R}$ güýje perpendikulýar (7.6-njy surat).



7.6-njy surat

Elbetde, $m_1 = m_O \cdot \cos\alpha$, $m_2 = m_O \cdot \sin\alpha$, bu ýerde $\alpha - \vec{m}_O$ we $\vec{R}$ wektorlaryň arasyndaky burç.

$\vec{m}_2$ momentli jübüti we $\vec{R}$ güýji $\left(\vec{m}_2 \perp \vec{R}\right)$ O_1 nokatda goýlan $\vec{R}_1 = \vec{R}$ güýç bilen çalşyralyň, $OO_1 = \dfrac{m_2}{R} = \dfrac{m_O \cdot \sin\alpha}{R}$. Netijede seredilýän güýçler sistemasy $\vec{m}_1$ momentli jübüte we $\vec{R}_1$ güýje getirildi. Emma $\left\{\vec{m}_1, \vec{R}_1\right\}$ sistema dinamiki wint bolup durýar, sebäbi $\vec{m}_1 \,//\, \vec{R}_1$.

7.4. Güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti. Warinýonyň teoremasy.

Güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin bu sistemanyň baş wektorynyň nola deň bolmagynyň we islendik merkeze görä baş momentiniň nola deň bolmagynyň, ýagny

$$\vec{R} = \vec{0}\ ,\ \vec{m}_O = \vec{0} \tag{7.5}$$

şertiň ýerine ýetmeginiň zerur we ýeterlikdigini görkezeliň.

Güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin (7.5) şertiň ýerine ýetmegi hökmanydyr. Sebäbi (7.5) şerte girýän deňlikleriň biri ýerine ýetmese, onda güýçler sistemasy bir güýje ($\vec{R} \neq \vec{0}$ bolanda) ýa-da bir jübüte ($\vec{m}_O \neq \vec{0}$ bolanda) getirilýär. Iki ýagdaýda hem güýçler sistemasy deňagramlaşmaýar. Şol bir wagtda (7.5) şert ýeterlik hem bolup durýar. Sebäbi $\vec{R} = \vec{0}$ bolsa, güýçler sistemasy bir jübüte getirilýär, emma $\vec{m}_O = \vec{0}$ sebäpli güýçler sistemasy deňagramlaşýar.

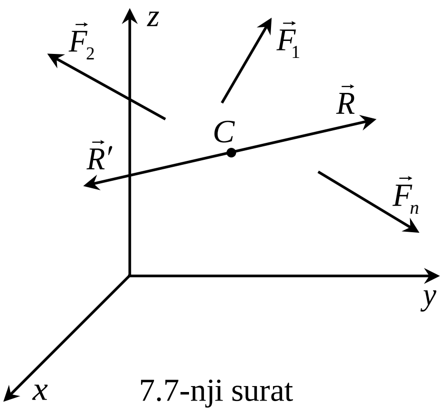
Indiki paragraflarda seredilýän güýçler sistemasynyň görnüşine laýyklykda (7.5) şertiň eýe bolýan görnüşleri bilen tanyşarys.

Alnan netijelerden peýdalanyp Warinýonyň teoremasyny subut edeliň.

Warinýon (Varignon) Pýer (1654-1722)
Fransuz matematigi. Mehanika, geometriýa, gidromehanika degişli ylmy işleriň awtory. 1687-nji ýylda täze teoremany subut edýär we soňra bu teorema onuň ady dakylýar.

Warinýonyň teoremasy. Eger güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi bar bolsa, onda bu deňtäsiredijiniň erkin nokada (merkeze) görä momenti sistema girýän güýçleriň bu nokada (merkeze) görä momentleriniň wektorlaýyn jemine deň.

Subudy. Goý, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasy täsir çyzygy C nokatdan geçýän $\vec{R}$ deňtäsiredijä getirilýän bolsun.



7.7-nji surat

C nokatda $\vec{R}' = -\vec{R}$ güýç goýalyň. Onda, $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}'\}$ güýçler sistemasy deňagramlaşan güýçler sistemasy bolar. Elbetde, bu güýçler sistemasy üçin $\vec{m}_O = \vec{0}$ (O-erkin nokat) bolmaly, ýagny

$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) + \vec{m}_O(\vec{R}') = \vec{0}$$

bolmaly. $\vec{R}$ we $\vec{R}'$ güýçleriň ululyklary boýunça deň we garşylykly ugrukdyrylandyklary sebäpli $\vec{m}_O(\vec{R}') = -\vec{m}_O(\vec{R})$. Onda ýokarky deňlikden

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \tag{7.6}$$

deňligi alarys. Teorema subut edildi.

(7.6) deňligi O nokatdan geçirilen (erkin) x oka proýektirläliň:

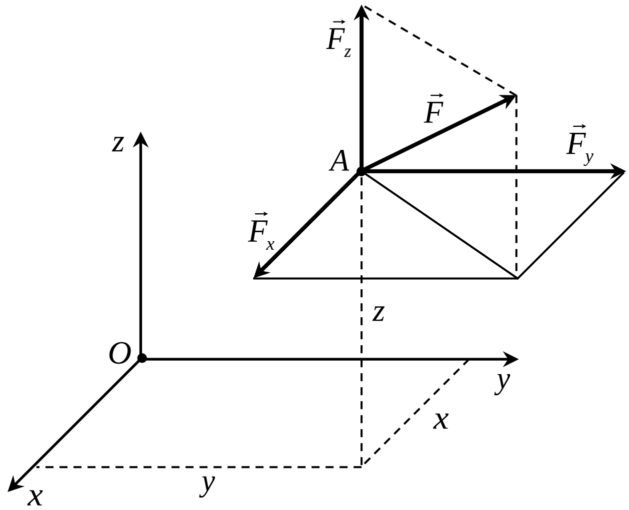
$$\left[\vec{m}_O(\vec{R})\right]_x = \sum \left[\vec{m}_O(\vec{F}_k)\right]_x$$

Güýjüň nokada görä momentiniň bu nokatdan geçýän oka bolan proýeksiýasynyň, bu güýjüň şu oka görä momentine deňligi sebäpli, ýokarky deňlikden alarys:

$$m_x(\vec{R}) = \sum m_x(\vec{F}_k) \tag{7.7}$$

Diýmek, **eger güýçler sistemasy deňtäsiredijä getirilýän bolsa, bu deňtäsiredijiniň oka görä momenti, sistema girýän güýçleriň bu oka görä momentleriniň jemine deň.**

Bellik. Goý, $\vec{F}$ güýç $A(x, y, z)$ nokatda goýlan bolsun. $\vec{F}$ güýji koordinata oklary boýunça $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ düzüjilere dargadalyň.



7.8-nji surat

(7.7) formulanyň esasynda $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_x) + m_x(\vec{F}_y) + m_x(\vec{F}_z)$ deňligi alarys. $\vec{F}_x$ güýjüň x oka paralleldigi sebäpli $m_x(\vec{F}_x) = 0$. $\vec{F}_y, \vec{F}_z$ güýçler Ox okuna perpendikulýar. Diýmek, $m_x(\vec{F}_y) = -F_y \cdot z$, $m_x(\vec{F}_z) = F_z \cdot y$.

Netijede $m_x(F) = y \cdot F_z - z \cdot F_y$ deňligi alarys. Oy, Oz oklara görä momentleri ýokardaka meňzeşlikde hasaplasak, netijede alarys:

$$\begin{cases} m_x(\vec{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y , \\ m_y(\vec{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z , \\ m_x(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x . \end{cases} \qquad (7.8)$$

Alnan (7.8) formula güýjüň koordinata oklaryna görä momentleriniň hasaplanylyşynyň analitikii aňlatmasy bolup durýar.

§8. Giňişlikdäki erkin güýçler sistemasy. Deňagramlaşmak şerti.

1. **Giňişlikdäki erkin güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitikii şertleri.**
2. **Giňişlikdäki parallel güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň şertleri.**

Bu paragrafda giňşlikdäki erkin güýçler sistemasynyň, şeýle-de, parallel güýçlerden ybarat güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitikii şertlerini getirip, käbir mysallara seredip geçeliň.

8.1. Giňişlikdäki erkin güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitiki şertleri.

Mälim bolşy ýaly (§7), erkin $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n\}$ güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin bu sistemanyň baş wektorynyň we erkin nokada görä baş momentiniň nola deň bolmagy, ýagny $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{m}_O = \vec{0}$ bolmagy zerur we ýeterlikdir.

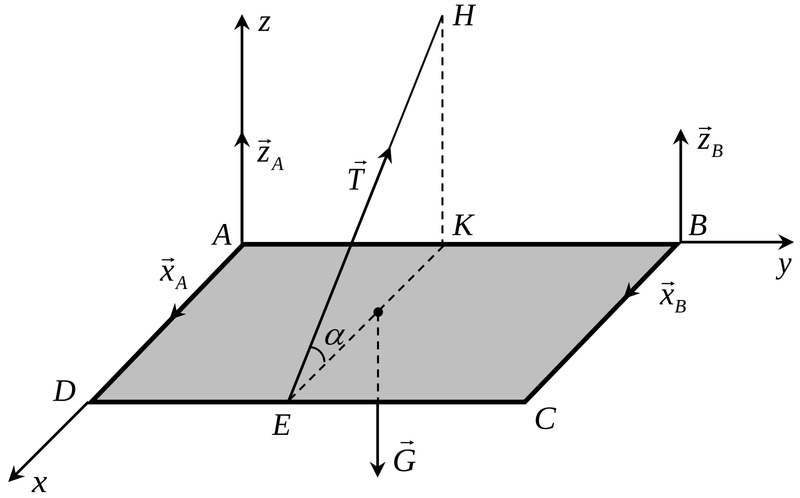
Onda baş wektory we baş momenti kesgitlemek üçin getirilen (7.1), (7.2) formulalardan peýdalanyp, deňagramlaşmagyň analitikii şertlerini ýazyp bileris:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0\ , \sum F_{ky} = 0\ , \sum F_{kz} = 0\ , \\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0\ , \sum m_y(\vec{F}_k) = 0\ , \sum m_z(\vec{F}_k) = 0\ . \end{cases} \tag{8.1}$$

Diýmek, giňişlikdäki erkin güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin sistema girýän güýçleriň dekart koordinata oklarynyň her haýsyna proýeksiýalarynyň jeminiň, şeýle-de, bu oklara görä momentleriniň jeminiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

(8.1) deňlemeleriň ulanylyşyna degişli bir mysala seredeliň.

Mysal. Agramy G bolan $ABCD$ tekje gorizontal ýagdaýda tekjäniň tekizligi bilen α burçy emele getirýän EH ýüp bilen saklanýar. A,B nokatlarda tekje silindrik şarnire oturdylan. $AK = KB = DE = EC$, $HK \perp AB$. Ýüpüň dartyş güýjüni we şarnirleriň reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli.



8.1-nji surat

Çözülişi. Jisimi (tekje) baglanyşyklardan erkinleşdirip, olaryň täsirlerini reaksiýa güýçleri bilen çalşyralyň. Netijede $\{\vec{x}_A, \vec{z}_A, \vec{x}_B, \vec{z}_B, \vec{T}, \vec{G}\}$-deňagramlaşan güýçler sistemasyny alarys. (8.1) deňlemeleri ulanalyň:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad x_A + x_B - T \cdot \cos\alpha = 0\ , \tag{a}$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad 0 \equiv 0\ ,$$

$$\sum F_{kz} = 0: \quad z_A + z_B + T \cdot \sin\alpha - G = 0\ , \tag{b}$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0: \quad T \cdot \sin\alpha \cdot \frac{AB}{2} + z_B \cdot AB - G \cdot \frac{AB}{2} = 0$$

ýa-da

$$\frac{1}{2} T \cdot \sin\alpha + z_B = \frac{1}{2} G\ , \tag{ç}$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0: \quad G \cdot \frac{AD}{2} - T \cdot AD \cdot \sin\alpha = 0\ ,$$

bu ýerden $T = \dfrac{G}{2\sin\alpha}$ bolýandygyny taparys.

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right)=0: \ T\cdot\cos\alpha\cdot\frac{AB}{2}-x_B\cdot AB=0$$

ýa-da $\qquad x_B=\dfrac{T\cdot\cos\alpha}{2}.$ $\qquad (d)$

Tapylan T-niň bahasyny (ç)-de goýup, z_B-ni taparys

$$z_B=\frac{1}{2}G-\frac{1}{2}\cdot\frac{G}{2\sin\alpha}\cdot\sin\alpha\,,\ \ z_B=\frac{1}{4}G\ .$$

(*d*)-den $\qquad x_B=\dfrac{G}{2\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{2}=\dfrac{G}{4tg\alpha}\ ,$

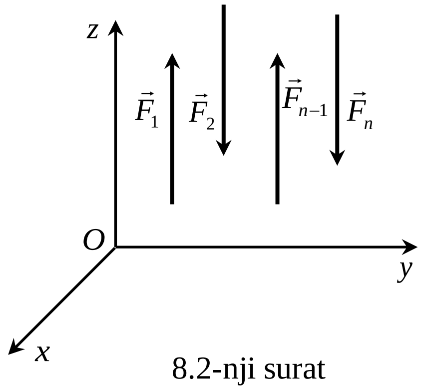
(*a*)-dan $\qquad x_A=T\cdot\cos\alpha-x_B=\dfrac{G}{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha-\dfrac{G}{4tg\alpha}=\dfrac{G}{4tg\alpha}\ ,$

(*b*)-den $\qquad z_A=G-T\cdot\sin\alpha-z_B=G-\dfrac{G}{2\sin\alpha}\cdot\sin\alpha-\dfrac{1}{4}G=\dfrac{1}{4}G$

netijeleri alarys.

8.2. Giňişlikdäki parallel güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň şertleri.

Goý, $\left\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\right\}$güýçler sistemasyna girýän güýçleriň täsir çyzyklary parallel bolsun. *z* koordinata okuny güýçlere parallel alalyň.



8.2-nji surat

$\vec{F}_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ güýçler *x,y* oklaryna perpendikulýar. Diýmek, $\sum F_{kx}\equiv 0$, $\sum F_{ky}\equiv 0$
Mundan daşary, $\sum m_z\left(\vec{F}_k\right)\equiv 0$, sebäbi $\vec{F}_i\,//\,Oz$. Netijede (8.1) deňagramlaşmak şerti şu görnüşe geler:

$$\sum F_k=0\ ,\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right)=0\ ,\ \sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0 \qquad (8.2)$$

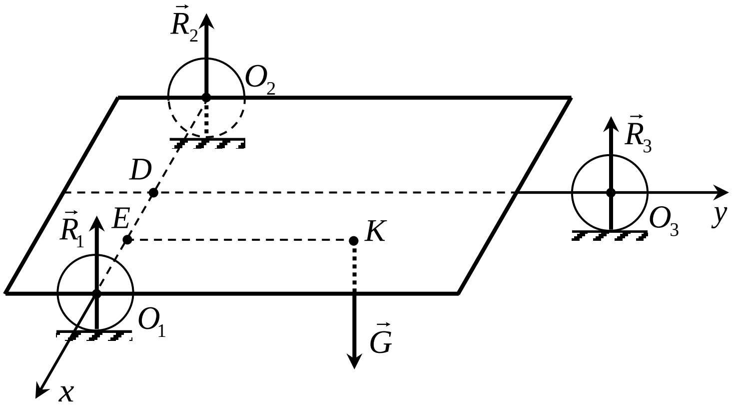
Diýmek, giňişlikdäki parallel güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin bu güýçleriň algebraik bahalarynyň jeminiň, şeýle-de, güýçlere perpendikulýar tekizlikde alnan oklara görä momentleriniň jeminiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

(8.2) şertiň ulanylyşyna degişli bir mysala seredeliň.

Mysal. Üç tigirli arabajygyň platformasynyň *K* nokadynda agramy $G=1000N$ bolan jisim dur. Arabajygyň her bir tigiriniň gorizontal tekizligi näçe güýç bilen basýandygyny tapmaly.

$$O_1O_2 = 1m,\ O_3D = 1{,}6m,\ O_1D = O_2D,\ O_1E = 0{,}4m,\ EK = 0{,}6m.$$

Arabajygyň öz agramyny göz öňünde tutmaly däl.



8.3-nji surat

Çözülişi. Gorizontal tekizligiň reaksiýa güýçlerini $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ bilen belgiläliň. Arabajyk $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{G}$ parallel güýçleriň täsirinde deňagramlaşýar. (8.2) deňagramlyk deňlemelerini ulanalyň.

$$\sum F_k = 0:\ R_1 + R_2 + R_3 - G = 0\ , \qquad (a)$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0:\ -G \cdot EK + R_3 \cdot O_3D = 0\ , \qquad (b)$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0:\ -R_1 \cdot O_1D + R_2 \cdot O_2D + G \cdot ED = 0\ . \qquad (ç)$$

Alnan deňlemeler sistemasyny çözeliň:

(b)-den $$R_3 = \frac{EK}{O_3D} \cdot G = 375N\ ,$$

($ç$)-den $$R_2 = R_1 - \frac{G}{5}\ , \qquad (d)$$

(a)-dan $$R_1 + R_1 - \frac{G}{5} + R_3 = G\ ,$$

$$2R_1 = G + \frac{G}{5} - R_3\ ,$$

$$R_1 = 412{,}5N\ ,$$

(d)-den $R_2 = 212{,}5N$ netijeleri alarys.

Arabajygyň tigirleri gorizontal tetkizligi degişlilikde $N_1 = R_1$, $N_2 = R_2$, $N_3 = R_3$ güýçler bilen basýarlar.

4-nji BAP
Tekiz güýçler sistemasy.

§9. Tekiz güýçler sistemasyny ýönekeý görnüşe getirmek.

1. **Güýjüň nokada (merkeze) görä algebraik momenti.**
2. **Jübütiň algebraik momenti.**
3. **Tekiz güýçler sistemasyny ýönekeý görnüşe getirmek.**

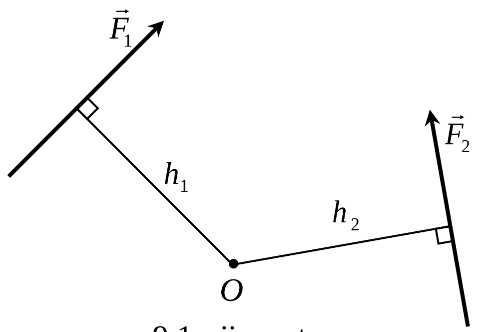
Soraglary seljermeklige geçmezden öň tekiz güýçler sistemasynyň kesgitlemesini getireliň.
Kesgitleme. Eger güýçler sistemasyna girýän güýçleriň täsir çyzyklary bir tekizlikde ýatýan bolsa, onda bu güýçler sistemasyna **tekiz güýçler sistemasy** diýilýär.

9.1. Güýjüň nokada (merkeze) görä algebraik momenti.

Bir tekizlikde ýatýan güýçleriň şu tekizlikde alnan erkin O nokada görä momentleri bu tekizlige perpendikulýar, ýagny bir göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan. Diýmek, güýçleriň momentleriniň ugurlaryny tapawutlandyrmak üçin olaryň algebraik bahasyna seretmek ýeterlik.
Kesgitleme. Belli bir alamat bilen alnan $\vec{F}$ güýjüň ululygynyň bu güýjüň O nokada görä egnine (h) köpeltmek hasylyna, ýagny

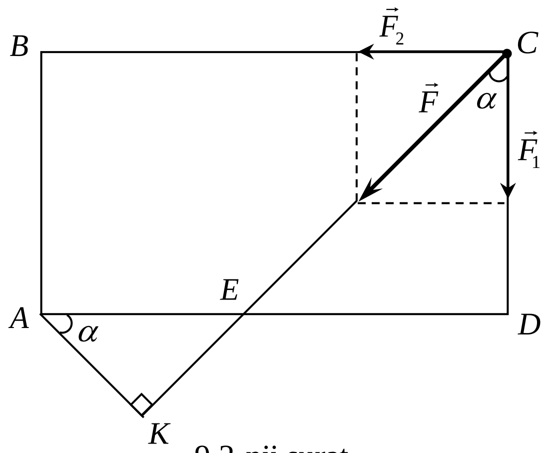
$$m_O\left(\vec{F}\right) = \pm F \cdot h \qquad (9.1)$$

ululyga $\vec{F}$ güýjüň O nokada görä algebraik momenti diýilýär.
Şeýlelikde, eger güýç nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine aýlansa, moment položitel, eger ugruna aýlansa, moment otrisatel hasaplanýar.
9.1-nji suratda görkezilen $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçler üçin: $m_O\left(\vec{F}_1\right) = -F_1 \cdot h_1,\ m_O\left(\vec{F}_2\right) = F_2 \cdot h_2$



9.1-nji surat

Bellik. (7.4) formula (Warinýonyň teoremasy) algebraik momentler üçin hem öz güýjüni saklaýar, ýöne formuladaky jem wektor ululyklaryň jemi däl-de, algebraik ululyklaryň jemi bolup durýar.
Bir mysala seredeliň.
Mysal. $ABCD$ gönüburçlyguň C nokadyna $\vec{F}$ güýç goýlan. $AB = a,\ BC = b.$ $\vec{F}$ güýjüň A nokada görä momentini tapmaly.



9.2-nji surat

Çözülişi. $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygyna A nokatdan AK perpendikulýar (egin) geçireliň. AK egni kesgitläliň.

$$AK = AE \cdot \cos\alpha = (AD - ED) \cdot \cos\alpha = (b - CD \cdot tg\alpha) \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left(b - a \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\alpha - a \cdot \sin\alpha$$

Diýmek, $m_A(\vec{F}) = -F \cdot AK = -F \cdot (b \cdot \cos\alpha - a \cdot \sin\alpha) = F \cdot (a \cdot \sin\alpha - b \cdot \cos\alpha)$

Bu momenti Warinýonyň teoremasyndan peýdalanyp tapalyň. $\vec{F}$ güýji gönüburçlugyň taraplary boýunça ugrukdyrylan $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ düzüjilere dargadalyň, $F_1 = F \cdot \cos\alpha$, $F_2 = F \cdot \sin\alpha$. Warinýonyň teoremasynyň esasynda alarys:

$$m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_1) + m_A(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot AD + F_2 \cdot AB = -F_1 \cdot b + F_2 \cdot a =$$

$$= -F \cdot \cos\alpha \cdot b + F \cdot \sin\alpha \cdot a = F \cdot (a \cdot \sin\alpha - b \cdot \cos\alpha)$$

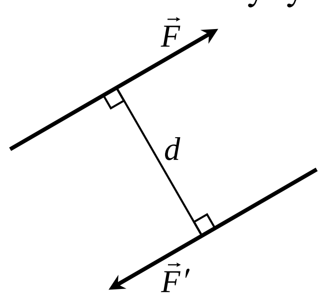
9.2. Jübütiň algebraik momenti.

Mälim bolşy ýaly, jübütiň momenti jübütiň täsir tekizligine perpendikulýar. Diýmek, bir tekizlikde ýatýan jübütleriň momentleri parallel wektorlar bolup durýarlar. Onda jübütleri tapawutlandyrmak üçin jübütleriň algebraik momentlerini ulanmak ýeterlik.

Kesgitleme. Belli bir alamat bilen alnan, jübüte girýän güýçleriň biriniň jübütiň egnine köpeltmek hasylyna, ýagny

$$m = \pm F \cdot d \tag{9.2}$$

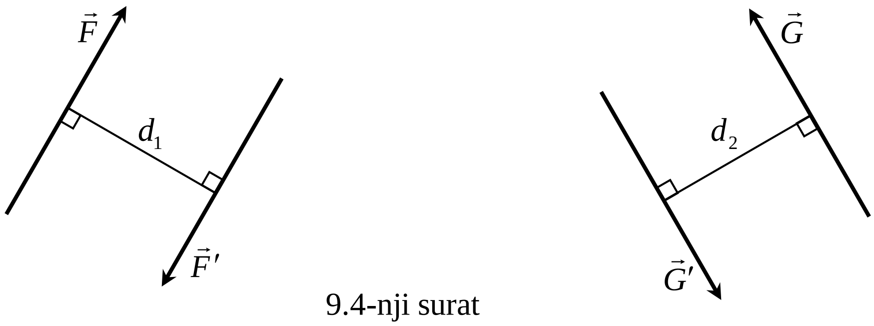
ululyga $(\vec{F}, \vec{F}')$ jübütiň algebraik momenti diýilýär.



9.3-nji surat

Eger, jübüt täsir tekizligini sagat diliniň hereketiniň tersine aýlamaga ymtylsa, moment položitel, eger ugruna aýlamaga ymtylsa, moment otrisatel hasaplanylýar.

Meselem, 9.4-nji suratda görkezilen jübütler üçin: $m(\vec{F},\vec{F}')=-F\cdot d_1$; $m(\vec{G},\vec{G}')=G\cdot d_2$



9.4-nji surat

Bellik. Jübütiň diňe momenti bilen häsiýetlendirilýändigi sebäpli jübüti şekillendirmek üçin duga görnüşli çyzygy ulanmak ýeterlik.

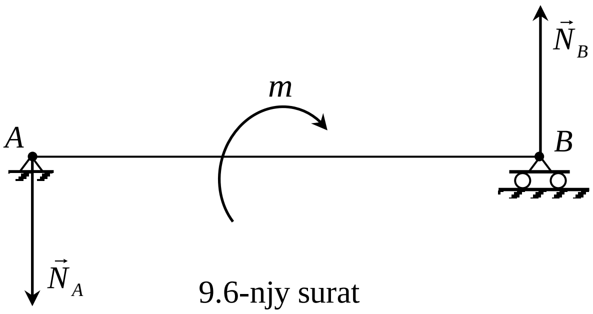
9.5-nji surat

(5.2) formula tekizlikde ýatýan jübütler sistemasy üçin ulanylanda formuladaky jem algebraik ululyklaryň jemi bolup durýar we deňtäsirediji jübüt hem şu tekizlikde ýatýar.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Deňagramlykdaky AB steržene $m=100N\cdot m$ momentli jübüt täsir edýär. $AB=0{,}5m.$ Reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli.

Çözülişi.



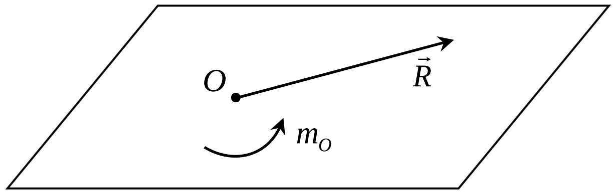
9.6-njy surat

Jübüti diňe jübüt deňagramlaşdyrýar. Diýmek, B nokatdaky $\vec{N}_B$ reaksiýa güýjüň AB steržene perpendikulýardygy sebäpli, A nokatdaky $\vec{N}_A$ reaksiýa güýji ululygy boýunça N_B-e deň, ugry garşylykly bolmaly, ýagny $\vec{N}_A,\vec{N}_B$ güýçler jübüti emele getirmeli. Bu jübütiň momenti $m(\vec{N}_A,\vec{N}_B)=N_A\cdot AB$ ululyk m-e deň bolmaly. Diýmek, $N_A\cdot AB=m$ ýa-da $N_A=\dfrac{m}{AB}=\dfrac{100N\cdot m}{0.5m}=200N$, $N_A=N_B=200N$.

9.3. Tekiz güýçler sistemasyny ýönekeý görnüşe getirmek.

$\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\}$ tekiz güýçler sistemasyna seredeliň. 7-nji paragrafda alnan netijeler tekiz güýçler sistemasy üçin hem dogrudyr.

Onda tekiz güýçler sistemasy erkin O nokatda goýlan sistemanyň $\vec{R}$ baş wektoryna we sistemanyň O nokada görä baş momentine deň $\vec{m}_O$ momentli jübüte getirilýär. Şeýlelikde, $\vec{R}$ güýç we $\vec{m}_O$ momentli jübüt bir tekizlikde ýatýar.



9.7-nji surat

Baş wektory we baş momenti kesgitlemek üçin aşakdaky formulalardan peýdalanmak bolar:

$$R_x = \sum F_{kx} \quad , \quad R_y = \sum F_{ky} \qquad m_O = \sum m_O\left(\vec{F}_k\right) \tag{9.3}$$

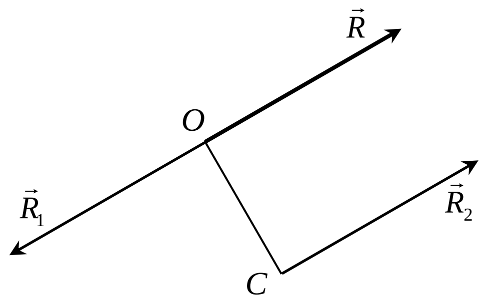
Deňagramlaşmaýan tekiz güýçler sistemasynyň nähili ýönekeý görnüşe getirilişiniň hususy ýagdaýlaryny öwreneliň.

I. $\vec{R} = \vec{0}$, $m_O \neq 0$. Bu ýagdaýda sistema m_O momentli jübüte getirilýär. m_O ululyk saýlanan merkeze bagly däl (sebäbi merkez hökmünde başga bir O_1 alnanda hem $\vec{R} = \vec{0}$; $m_{O_1} = m_O$ şert ýerine ýetmese, güýçler sistemasy dürli jübütlere getirilýän ýaly bolardy).

II. Eger $\vec{R} \neq \vec{0}$ bolsa, onda güýçler sistemasy deňtäsiredijä getirilýär. Şeýlelikde, iki ýagdaýyň bolmagy mümkin.

a) $\vec{R} \neq \vec{0}$, $m_O = 0$. Bu ýagdaýda sistema O nokatda goýlan $\vec{R}$ deňtäsiredijä getirilýär.

b) $\vec{R} \neq \vec{0}$, $m_O \neq 0$. m_O momentli jübüti düzýän $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ güýçler alnanda $\vec{R}_1 = -\vec{R}$ deňlikden ugur alalyň.



9.8-nji surat

$\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2\right)$ jübütiň egni bolsa

$$R \cdot OC = \left|m_O\right| \tag{9.4}$$

şerti kanagatlandyrmaly.

$\vec{R}_1, \vec{R}$ güýçleriň deňagramlaşýandygy sebäpli, güýçler sistemasy C nokatda goýlan $\vec{R}_2$ güýje getirilýär. C nokadyň ýerleşişi iki şert bilen kesgitlenýär:

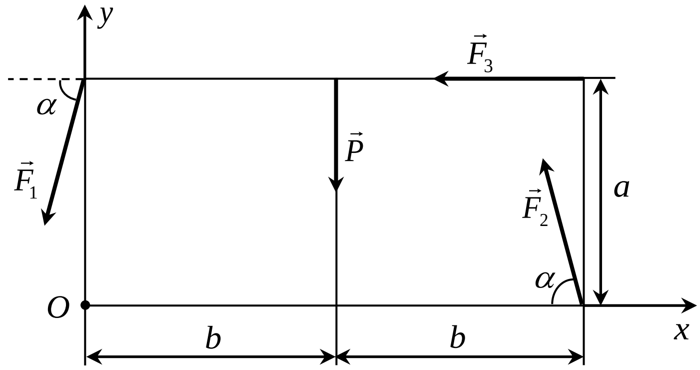
1) $OC \perp \vec{R}$, OC (9.4) deňligi kanagatlandyrmaly;

2) $\vec{R}_2$ güýjüň O nokada görä momentiniň alamaty m_O ululygyň alamaty bilen deň bolmaly.

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. 9.9-njy suratda görkezilen $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{P}$ güýçleri O merkeze getirmeli.

$$F_1 = F_2 = F_3 = 40N,\ P = 60N,\ a = 0{,}5m,\ b = 0{,}8m,\ \alpha = 60^0.$$



9.9-njy surat

Çözülişi. Berlen güýçler sistemasynyň baş wektoryny we O nokada görä baş momentini tapalyň:

$$\vec{R} = (R_x, R_y),$$

$$R_x = -F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 \cdot \cos\alpha - F_3 = -40 \cdot \frac{1}{2} - 40 \cdot \frac{1}{2} - 40 = -80(N),$$

$$R_y = -F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\alpha - P = -40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 60 = -60(N),$$

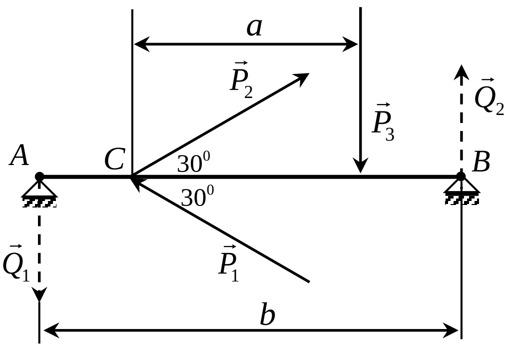
$$m_O = m_O(\vec{F}_1) + m_O(\vec{F}_2) + m_O(\vec{F}_3) + m_O(P) = F_1 \cdot \cos\alpha \cdot a +$$

$$+ F_2 \cdot \sin\alpha \cdot 2b + F_3 \cdot a - P \cdot b = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}8 +$$

$$+ 40 \cdot 0{,}5 - 60 \cdot 0{,}8 \approx 37{,}42(N \cdot m).$$

Şeýlelik bilen berlen güýçler sistemasy O nokatda goýlan $\vec{R} = (-80; -60)$ (ululygy $R = 100N$) güýje we $m = 37{,}42(N \cdot m)$ momentli jübüte getirilýär.

Mysal. *AB* pürse täsir edýän $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ güýçler sistemasyny ýönekeý görnüşe getirmeli, şeýle-de, *A* we *B* podşipnikleriň reaksiýa güýçlerini tapmaly. $P_1 = P_2 = P_3 = P$.

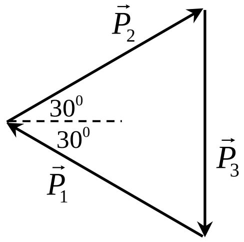


9.10-njy surat

Çözülişi.

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3.$$

Görnüşi ýaly, $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \vec{0}$, ýagny baş wektor nola deň, $\vec{R} = \vec{0}$.

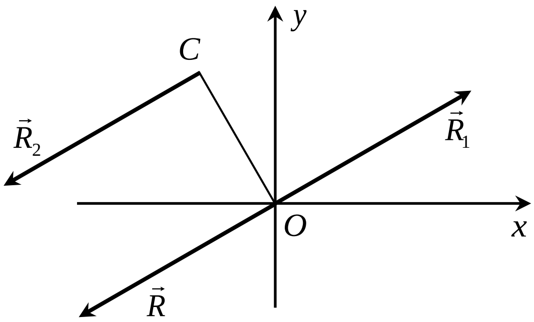


9.11-nji surat

Onda, sistemanyň islendik nokada görä (meselem, C nokada görä) momenti $-P\cdot a$ deň. Diýmek, berlen güýçler sistemasy $m=-P\cdot a$ momentli jübüte getirilýär. Jübüti diňe jübüt bilen deňagramlaşdyryp bolýar, ýagny A,B podşipniklerdäki reaksiýa güýçleri $-P\cdot a$ momentli jübüti düzmeli. Bu jübüti çyzgyda punktir bilen görkezilen $\vec{Q}_1,\vec{Q}_2$ güýçlerden düzeliň. $(\vec{Q}_1,\vec{Q}_2)$ jübütiň momenti $Q\cdot b$ deň $(\vec{Q}_1=\vec{Q}_2=Q)$. Onda $Q\cdot b=P\cdot a$ deňagramlyk şerti ýerine ýetmeli ýa-da $Q=\dfrac{P\cdot a}{b}=Q_1=Q_2$.

Mysal. Birinji mysalda seredilen $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\}$ güýçler sistemasyny ýönekeýleşdirmeli.

Çözülişi. $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\}$ güýçler sistemasy O nokatda goýlan $\vec{R}=(-80;-60)$ güýje we $m=37{,}42\,N\cdot m$ momentli jübüte getirildi.



9.12-nji surat

$m=37{,}42\,N\cdot m$ momentli jübüti $\vec{R}_1,\vec{R}_2$ güýçlerden düzeliň, $R_1=R_2=R=100N$, $\vec{R}_1=-\vec{R}$. Elbetde, $R\cdot OC=m$ deňlik ýerine ýetmeli. Bu ýerden

$$OC=\frac{m}{R}=\frac{37{,}42N\cdot m}{100N}=0{,}3742m.$$

$\vec{R},\vec{R}_1$ güýçler deňagramlaşýar. Netijede, $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\}$ güýçler sistemasy C nokatda goýlan $\vec{R}_2$ güýje getirilýär.

§10. Tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.

1. **Deňagramlaşmak şertiniň esasy görnüşi.**
2. **Deňagramlaşmak şertiniň ikinji görnüşi.**
3. **Deňagramlaşmak şertiniň üçünji görnüşi.**
4. **Parallel güýçlerden ybarat tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.**

Belli bolşy ýaly, güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň zerur we ýeterlik şerti $\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{m}_O = \vec{0}$ (7.3) deňlikler bilen berilýär. Bu deňliklerden ugur alyp, tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitikii şertlerini tapalyň. Bu şertleri üç görnüşde aňladyp bolýar.

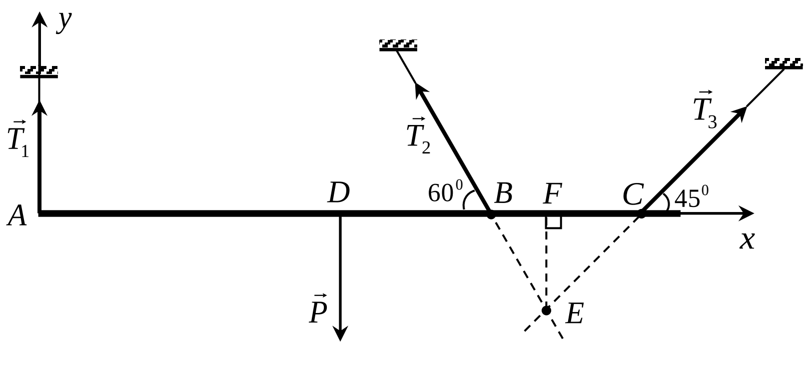
10.1. Deňagramlaşmak şertiniň esasy görnüşi.

$\vec{R}$ baş wektoryň nola deň bolmagy üçin bu wektoryň R_x we R_y düzüjileri nola deň bolmaly. Onda tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin $R_x = 0$, $R_y = 0$, $m_O = 0$ deňlikler ýerine ýetmeli. Bu ýerde m_O-güýçler sistemasynyň O nokada göra baş momenti, O-güýçleriň ýatan tekizliginiň erkin nokady. Diýmek, tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şertini

$$\sum F_{kx} = 0 \ , \ \sum F_{ky} = 0 \ , \ \sum m_O(F_k) = 0 \tag{10.1}$$

görnüşde alarys. (10.1) formula tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagynyň analitikii şertlerini görkezýär, ýagny tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin sistema girýän güýçleriň koordinata oklarynyň ikisine-de proýeksiýalarynyň jemleriniň nola deň bolmagy, şeýle-de, güýçleriň ýatýan tekizliginde alnan erkin nokada görä momentleriniň jeminiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir. Deňagramlaşmak şertiniň ulanylyşynyň bir mysalyna seredeliň.

Mysal. Agramy $P = 42kN$ bolan asma köpri 10.1-nji suratda görkezilişi ýaly, tanaplar bilen gorizontal ýagdaýda saklanýar. Asma köpriniň agyrlyk merkezi D nokatda. $AD = 4m, DB = 2m, BF = 1m$. Tanaplaryň dartyş güýçlerini kesgitlemeli.



10.1-nji surat

Çözülişi. Asma köprini baglanyşyklardan (tanaplar) erkinleşdirip, olary dartyş güýçleri bilen çalşyralyň.

Deňagramlaşýan $\{\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{P}\}$ güýçler sistemasyny alarys. Bu güýçler sistemasy üçin (10.1) deňagramlaşmak şertlerini ulanalyň:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad -T_2 \cdot \cos 60^0 + T_3 \cdot \cos 45^0 = 0 \ , \qquad (*)$$
$$\sum F_{ky} = 0: \quad T_1 + T_2 \cdot \sin 60^0 + T_3 \cdot \sin 45^0 - P = 0 \ , \qquad (**)$$
$$\sum m_E\left(\vec{F}_k\right) = 0: \quad P \cdot DF - T_1 \cdot AF = 0 .$$

Soňky deňlemeden

$$T_1 = P \cdot \frac{DF}{AF} = 42kN \cdot \frac{3}{7} = 18kN$$

bolýandygyny taparys. Tapylan T_1-i (**) deňlemede ýerine goýup (*) deňlemäni hem ulansak, onda

$$\begin{cases} -T_2 \cdot \dfrac{1}{2} + T_3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ T_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + T_3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 24 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasy alnar. Bu deňlemeler sistemasyny çözüp T_2, T_3 güýçleri taparys:

$$T_2 = 17{,}6kN \ , \quad T_3 = 12{,}4kN .$$

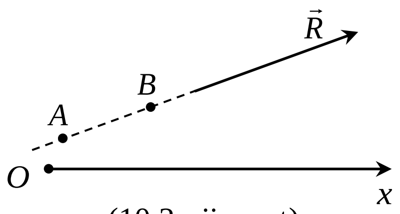
10.2. Deňagramlaşmak şertiniň ikinji formasy.

Tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin güýçler sistemasynyň tekizliginde erkin alnan A we B nokatlara görä baş momentleriniň, şeýle-de, sistema girýän güýçleriň AB kesime perpendikulýar bolmadyk Ox oka bolan proýeksiýalarynyň jeminiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir, ýagny:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0 \ , \ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0 \ , \ \sum F_{kx} = 0 . \qquad (10.2)$$

Bu şertleriň zerurlygyny ýeňillik bilen görkezip bolar. Eger (10.2) deňlikleriň biri ýerine ýetmese, onda $\vec{R} \neq \vec{0}$ ýa-da $m_A \neq 0 \ (m_B \neq 0)$ bolar we netijede deňagramlyk bolmaz.

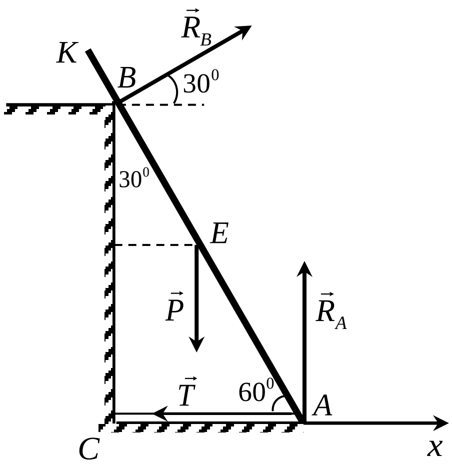
(10.2) şertleriň ýeterlikdigini subut edeliň. Eger (10.2)-ä girýän deňlikleriň ilkinji ikisi ýerine ýetýän bolsa $(m_A = 0, m_B = 0)$, onda 9-njy paragrafyň netijelerine laýyklykda seredilýän güýçler sistemasynyň A we B nokatlardan geçýän deňtäsiredijisi bolar (10.2-nji surat). Emma (10.2) şertiň üçünji deňligi boýunça $R_x = \sum F_{kx} = 0$ bolmaly. Ox ok AB kesime perpendikulýar däldigi sebäpli soňky deňligiň ýerine ýetmegi üçin $\vec{R} = \vec{0}$ bolmaly.



(10.2-nji surat)

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Agramy $P = 600N$, uzynlygy $4m$ bolan pürs A nokatda ýylmanak gorizontal tekizlige, B nokatda wertikal diwara daýanýar. Görkezilen (10.3-nji surat) ýagdaýda pürs gorizontal tekizlikden çekilen AC ýüp bilen deňagramlykda saklanýar. Ýüpüň dartyş güýjüni we daýanç reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli.



10.3-nji surat

Çözülişi. Pürsi baglanyşyklardan erkinleşdirip, olary reaksiýa güýçleri bilen çalşyralyň. Deňagramlaşýan $\{\vec{R}_B, \vec{R}_A, \vec{T}, \vec{P}\}$ güçler sistemasy üçin (10.2) deňagramlaşmak şertini ulanalyň:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0: \quad -R_B \cdot AB + P \cdot \frac{AK}{2} \cdot \cos 60^0 = 0$$

ýa-da $\left(AB = \dfrac{BC}{\cos 30^0} = \dfrac{3m}{\cos 30^0} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} m \text{ , } AK = 4m \right)$

$$-R_B \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} + P = 0 .$$

Bu deňlikden $R_B = \dfrac{\sqrt{3} \cdot P}{6} \approx 173N$ bolýandygyny alarys.

$$\sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0: \; R_A \cdot AB \cdot \sin 30^0 - P \cdot \left(AB \cdot \sin 30^0 - AE \cdot \sin 30^0 \right) = 0$$

ýa-da $R_A \cdot \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2} - P \cdot \left(\dfrac{6}{\sqrt{3}} - 2 \right) \cdot \dfrac{1}{2} = 0$

Bu deňlikden $R_A = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot P \cdot \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}} - 1 \right) \approx 259N$ bolýandygyny alarys.

$$\sum F_{kx} = 0: \; R_B \cdot \cos 30^0 - T = 0 .$$

Bu deňlikden $T = R_B \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 224N$ bolýandygyny alarys.

10.3. Deňagramlaşmak şertiniň üçünji görnüşi.

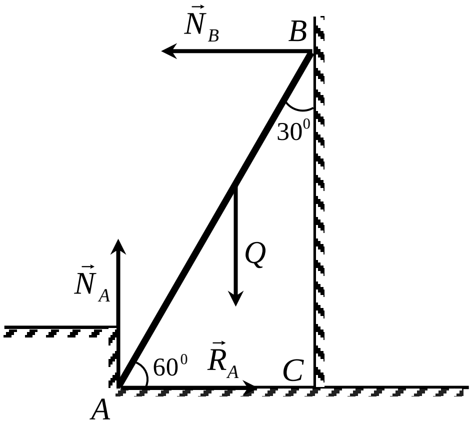
Tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmagy üçin sistema girýän güýçleriň bir göni çyzykda ýatmaýan erkin A,B,C nokatlara görä momentleriniň jemleriniň nola deň bolmaklygy zerurdyr we ýeterlikdir, ýagny

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0 \; , \; \sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0 \; , \; \sum m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0 \qquad (10.3)$$

şertler ýerine ýetmeli. Bu şertiň zerurdygy düşnükli. Ýeterlikdigini görkezeliň. Eger (10.3) şertler ýerine ýetip, güýçler sistemasy deňagramlaşmaýan bolsa, onda onuň deňtäsiredijisi bir göni çyzykda ýatmaýan A,B,C nokatlardan geçmeli bolar. Bu bolsa mümkin däl.

Getirilen deňagramlaşmak şertiniň ulanylyşyna degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Agramy $Q = 1000N$ bolan pürs A nokatda gorizontal tekizlige we direge, B nokatda diwara daýanýar. Sürtülme ýok diýip kabul edip, daýanç reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli.



10.4-nji surat

Çözülişi. Pürsi baglanyşyklardan erkinleşdirip, olary reaksiýa güýçleri bilen çalşyralyň. Deňagramlaşýan $\{\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{R}_A, Q\}$ güýçler sistemasy üçin (10.3) şertleri ulanalyň:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0: \ N_B \cdot AB \cdot \cos 30^0 - Q \cdot \frac{AB}{2} \cdot \sin 30^0 = 0 \ .$$

Bu deňlemeden $N_B = \dfrac{Q}{2\cdot\sqrt{3}} \approx 288.7N$ bolýandygyny alarys.

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0: N_B \cdot AB \cdot \cos 30^0 + Q \cdot \frac{AB}{2} \cdot \sin 30^0 - N_A \cdot AB \cdot \sin 30^0 = 0 .$$

Bu deňlemeden $N_A = \left(N_B \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{Q}{4} \right) \cdot 2 = 1000N$ bolýandygyny alarys.

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0: R_A \cdot AB \cdot \sin 60^0 + Q \cdot \frac{AB}{2} \cdot \sin 30^0 - N_A \cdot AB \cdot \sin 30^0 = 0 .$$

Bu deňlemeden $R_A = \left(N_A \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{Q}{4} \right) \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 288{,}7N$ netijäni alarys.

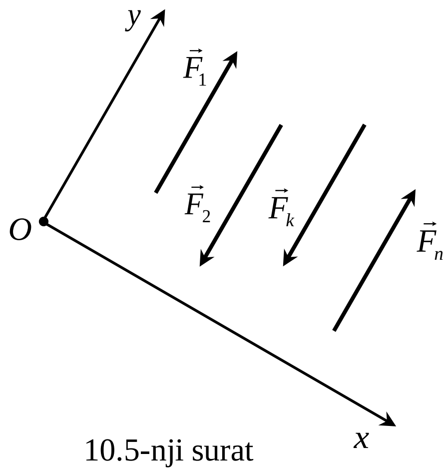
10.4. Parallel güýçlerden ybarat tekiz güýçler sistemasynyň deňagramlaşmak şerti.

Goý, tekiz güýçler sistemasyna girýän güýçler parallel bolsun. Ox okuny bu güýçlere perpendikulýar, Oy okuny parallel alalyň (10.5-nji surat). Onda güýçleriň Ox oka proýeksiýalary nola deň we (10.1) şertiň birinji deňlemesi toždestwo bolup durýar.

Diýmek, parallel güýçleriň deňagramlaşmak şerti

$$\sum F_{ky} = 0 \ , \ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (10.4)$$

görnüşe eýe bolar.



10.5-nji surat

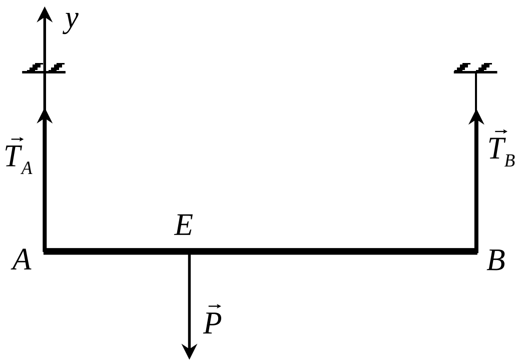
Parallel güýçleriň deňagramlaşmagynyň ýene bir görnüşini (10.2) şertden alarys:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right)=0 \ , \ \sum m_B\left(\vec{F}_k\right)=0 \qquad (10.5)$$

Şeýlelikde, A we B nokatlar güýçlere parallel göni çyzykda ýatmaly däl.

Parallel güýçleriň deňagramlaşmagyna degişli mysala seredip geçeliň.

Mysal. 10.6-njy suratda görkezilen AB pürsüň agramy $P=400N$. Pürs parallel ýüpler bilen gorizontal ýagdaýda deňagramlykda saklanýar. Pürsüň agyrlyk merkezi E nokatda, $EB=3AE$. Ýüpleriň dartyş güýçlerini tapmaly.



10.6-njy surat

Çözülişi. Pürsi ýüplerden erkinleşdirip, olary dartyş güýçleri bilen çalşyralyň. (10.4) şertleri ulanalyň:

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right)=0: \ T_B\cdot AB-P\cdot AE=0.$$

Bu deňlikden $T_B=P\cdot\dfrac{AE}{AB}=P\cdot\dfrac{AE}{4AE}=\dfrac{1}{4}P=100N$

netijäni alarys.

$$\sum F_{ky}=0: \quad T_A+T_B-P=0 \ .$$

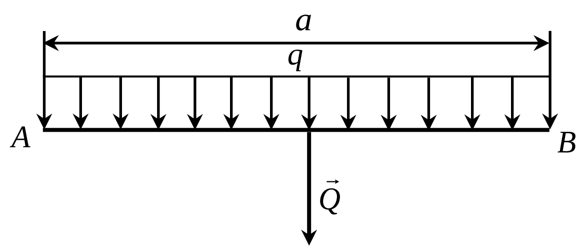
Bu deňlikden $T_A=P-T_B=400N-100N=300N$ netijäni alarys.

§11. Paýlanan güýçler.

Inženerçilik hasaplama işlerinde berlen üstde käbir kanuna laýyklykda paýlanan güýçler gabat gelýär. Bir tekizlikde ýatýan paýlanan güýçleriň käbir mysallaryna seredip geçeliň.

Bir tekizlige degişli paýlanan güýçler q intensiwligi bilen, ýagny paýlanan güýçleriň täsir edýän çyzygynyň nokadyna täsir edýän güýç bilen häsiýetlendirilýär. Intensiwligiň ölçeg birligi $\frac{N}{m}$.

1. Kesim boýunça deňölçegli paýlanan güýçler.



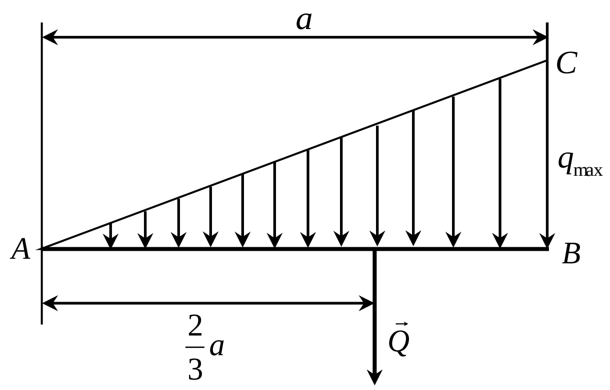
11.1-nji surat

Bu ýerde $q = const$. Statiki hasaplamalarda bu paýlanan güýçleri

$$Q = a \cdot q \tag{11.1}$$

güýç bilen çalşyrylýar, $\vec{Q}$ güýç AB kesimiň ortasyna goýlan.

2. Kesim boýunça çyzykly kanuna laýyklykda paýlanan güýçler.



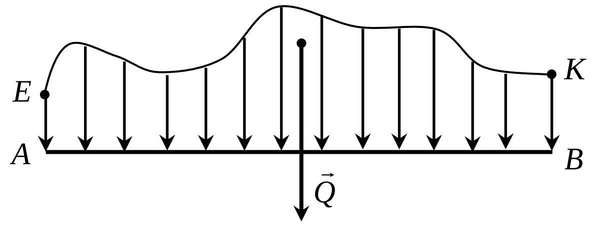
11.2-nji surat

Bu paýlanan güýçler üçin q intensiwlik noldan käbir q_{max}-a çenli artýar. Paýlanan güýçleriň Q deňtäsiredijisi ABC üçburçluk görnüşli plastina täsir edýän agyrlyk güýçleriniň deňtäsiredijisiniň kesgitlenilişi ýaly tapylýar. Birjynsly plastinanyň agramy onuň meýdanyna göni proporsional:

$$Q = \frac{1}{2} a \cdot q_{max} \tag{11.2}$$

$\vec{Q}$ güýç A nokatdan $\frac{2}{3}a$ aralykda goýlan (seret §14).

3. Kesim boýunça erkin paýlanan güýçler.



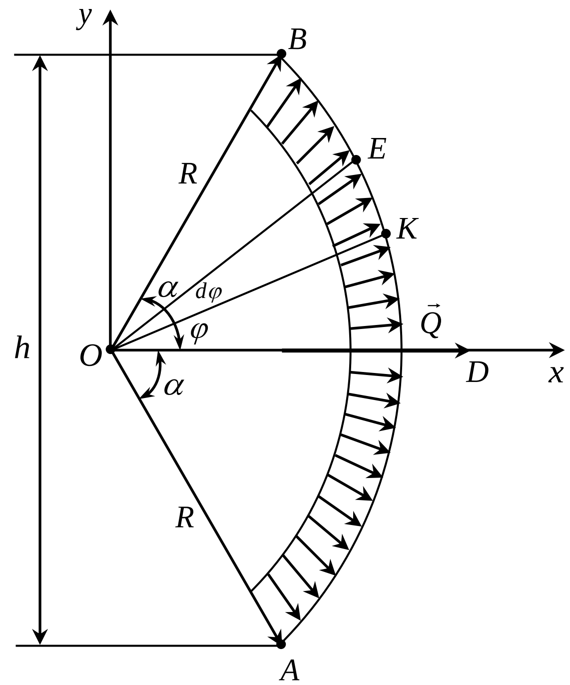
11.3-nji surat

Paýlanan güýçleriň deňtäsiredijisi $\vec{Q}$ güýç, ululygy boýunça *AEKB* figuranyň meýdanyna san taýdan deň. $\vec{Q}$ güýç *AEKB* meýdanyň agyrlyk merkezinde goýlan.

Bellik. Meýdanlaryň agyrlyk merkezini kesgitlemeklik soragy 14-nji paragrafda serediljekdir.

4. Töweregiň dugasy boýunça deňölçegli paýlanan güýçler.

Şeýle güýçleriň mysaly hökmünde silindrik gabyň gapdal diwaryna edilýän gidrostatiki basyşy görkezmek bolar.



11.4-nji surat

R-duganyň radiusy, $A\hat{O}D = B\hat{O}D = \alpha$, *Ox*-simmetriýa oky.

Paýlanan güýçleriň deňtäsiredijisi $\vec{Q}$ güýç, *Ox* ok boýunça ugrukdyrylan. $\vec{Q}$ güýjüň ululygyny kesgitläliň.

Duganyň üstünde ýerleşişi φ burç bilen kesgitlenýän *EK* elemente seredeliň, bu elementiň uzynlygy $dS = R\,d\varphi$. Bu elemente täsir edýän güýç, $dQ = q \cdot dS = = q \cdot R\,d\varphi$. $d\vec{Q}$ güýjüň x oka proýeksiýasy $dQ_x = dQ \cdot \cos\varphi = q \cdot R \cdot \cos\varphi\, d\varphi$.

Onda $Q = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} q \cdot R \cdot \cos\varphi\, d\varphi = q \cdot R \cdot \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha}$

$$Q = 2q \cdot R \cdot \sin\alpha \tag{11.3}$$

ýa-da

$$Q = q \cdot h \tag{11.4}$$

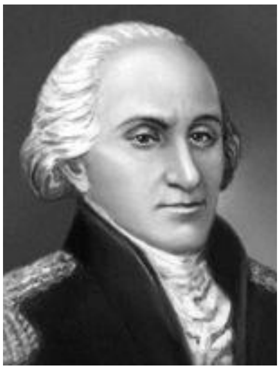
bu ýerde h–AB hordanyň uzynlygy.

§12. Sürtülme.

1. **Typma sürtülmesi.**
2. **Tigirlenme sürtülmesi.**

12.1. Typma sürtülmesi.

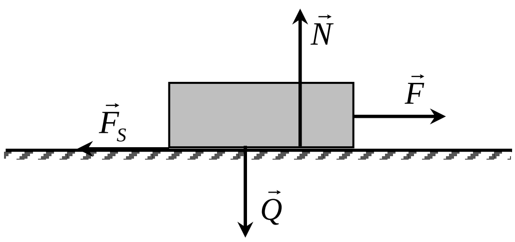
Tejribelerden bilşimiz ýaly, bir jisim beýleki jisimiň üstünde typma hereket etmäge çalyşanda ýa-da hereket edende jisimleriň galtaşýan tekizliginde bularyň birek-birege görä hereketine garşylyk görkezýan güýç ýüze çykýar. Bu güýje **typma sürtülme güýji** diýilýär. Sürtülýän üstleriň ideal ýylmanak däldigi typma sürtülmesiniň ýüze çykmagynyň esasy sebäpleriniň biri bolup durýar. Şeýle-de, sürtülme güýji jisimleriň fiziki häsiýetlerine uly derejede bagly. Sürtülme–fiziki-mehaniki hadysa bolup, bu hadysany amaly taýdan öwrenmeklik üçin fransuz alymy Ş.Kulon (1736-1806) tarapyndan açylan empirik[4] kanunlardan peýdalanylýar.



Şarl Ogýusten de Kulon (1736-1806)

Fransuz alymy. Harby inžener. Elektrostatikany esaslandyryjylaryň ilkinjileriniň biri. Sürtülme kanynlaryny açan alym.

Ýönekeý bir tejribä seredip geçeliň. Q agramly jisim gorizontal tekizlikde duran bolsun. Jisime gorizontal $\vec{F}$ güýç bilen täsir edeliň.



12.1-nji surat

[4] Empirik-grek sözi, tejribä esaslanmak.

$\vec{F}$ güýjüň ululygynyň belli bir çägine çenli jisim herekete gelmeýär. Diýmek, gorizontal tekizlikde ululygy boýunça *F*-e deň bolan gapma-garşy güýç ýüze çykýar. Emma *F* güýji ulaldyp belli bir çäge ýetirilenden soň jisim herekete girýär.

Kesgitleme. Otnositel dynçlykda ýüze çykýan sürtülme güýjüne *dynçlyk sürtülme güýji* diýilýär; typmada ýüze çykýan sürtülme güýjüne *typma sürtülme güýji* diýilýär.

Indi, Ş.Kulonyň kanunlaryny getireliň.

I. Sürtülme güýji sürtülýän üstleriň ölçeglerine bagly däl;

II. Dynçlyk sürtülme güýji täsir edýän güýçlere bagly bolup, käbir çäge çenli jisimleriň typmasyna ýol bermeýär. Emma dynçlyk sürtülme güýji jisimler jübüti üçin kesgitli maksimal bahadan uly bolup bilmeýär;

III. Sürtülme güýjüniň maksimal bahasy bir jisimiň beýleki jisime edýän normal basyşyna göni proporsional;

IV. Sürtülme güýjüniň maksimal bahasy sürtülýän jisimleriň materiallaryna bagly.

Şertli belgileri girizeliň: $\vec{F}_{d.s.}$-dynçlyk sürtülme güýji; $F_{\max}$-dynçlyk sürtülme güýjüniň maksimal bahasy; $\vec{N}$-daýanç üstüniň normal reaksiýasy. Onda Kulonyň kanunynyň esasynda

$$F_{\max} = f \cdot N \tag{12.1}$$

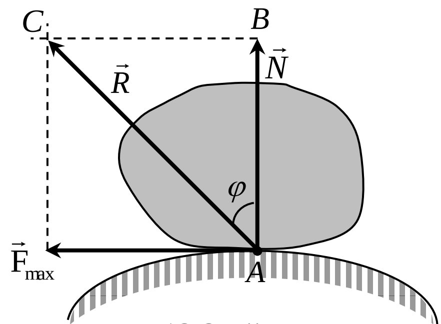
empirik deňligi alarys; bu ýerde, *f*-proporsionallyk koeffisiýenti bolup, **sürtülme koeffisiýenti** diýlip atlandyrylýar;

$f = \dfrac{F_{\max}}{N}$ deňlikden görnüşi ýaly, sürtülme koeffisiýenti ölçegsiz ululyk.

Bellik. $F_{d.s.}$ güýç $f \cdot N$ ululykdan kiçidir ýa-da deňdir, şeýlelikde, $F_{d.s.} < f \cdot N$ bolsa-jisim herekete girmeýär. $F_{d.s.} = f \cdot N$ bolsa-jisim hereketlenýär.

Kritiki pursata, ýagny $F_{d.s.}$ güýç maksimal baha ýeten pursata seredeliň.

$$F_{d.s.} = F_{\max} = f \cdot N$$



12.2-nji surat

Daýanç üstüniň $\vec{R}$ reaksiýasy, $\vec{F}_{\max}$ we $\vec{N}$ güýçlerden ybarat, ýagny $\vec{R} = \vec{F}_{\max} + \vec{N}$

ABC gönüburçly üçburçlukdan görnüşi ýaly, $tg\varphi = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{F_{\max}}{N} = \dfrac{f \cdot N}{N} = f$.

$$tg\varphi = f \tag{12.2}$$

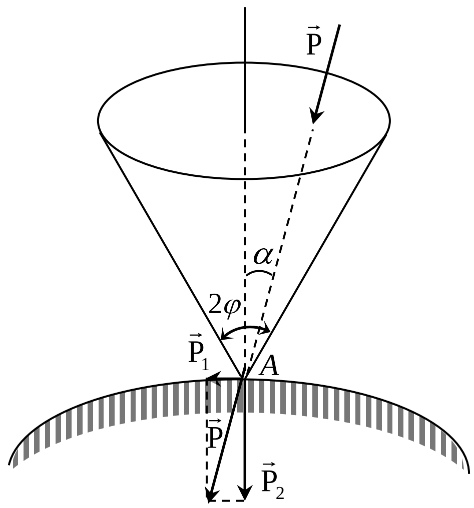
Bu ýerde φ-daýanç üstüniň normaly bilen daýanç üstüniň reaksiýasynyň arasyndaky burç. Bu burça **sürtülme burçy** diýilýär. Diýmek, sürtülme burçunyň tangensi sürtülme koeffisiýentine deň.

Eger jisimiň daýanç üsti boýunça islendik ugra ornuny üýgetmäge mümkinçiligi bolsa, onda reaksiýa güýçleriniň täsir çyzyklary konus görnüşli üst emele getirer (12.3-nji surat).

Kesgitleme. Emelegetirijileri typma üstüniň berlen nokadyndaky normaly bilen sürtülme burçuny emele getirýän konusa **sürtülme konusy** diýilýär.

Eger jisim daýanç üsti boýunça islendik tarapa hereket edende şol bir sürtülme koeffisiýenti bolsa, onda sürtülme konusy tegelek konus (esasynda tegelek) bolýar.

Goý, jisime täsir edýan güýçler täsir çyzygy A daýanç nokadyndan geçýän $\vec{P}$ güýje getirilýän bolsun. $\alpha - \vec{P}$ güýç bilen normalyň arasyndaky burç. $\vec{P}$ güýji täsir çyzygy boýunça A nokada göçüreliň we $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ düzüjilere dargadalyň. $\vec{P}_1$–daýanç üstüň galtaşma tekizliginde, $\vec{P}_2$–daýanç üstüň normaly boýunça ugrukdyrylan.



12.3-nji surat

Onda (12.1) we (12.2) formulalaryň esasynda alarys: $F_{\max} = f \cdot P_2 = tg\varphi \cdot P_2$.

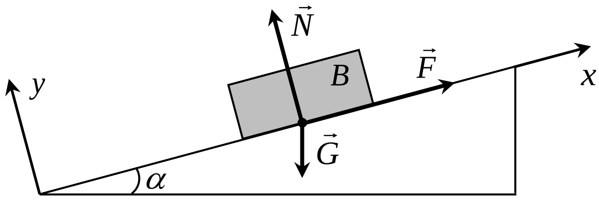
Jisimi daýanç üsti boýunça typdyrmaga çalyşýan P_1 güýç $P_2 \cdot tg\alpha$ ululyga deň. Elbetde jisimiň typmazlygy üçin $P_1 \le F_{\max}$ bolmaly ýa-da $P_2 \cdot tg\alpha \le tg\varphi \cdot P_2$ deňsizlik ýerine ýetmeli. Bu ýerden jisimiň daýanç üstünde deňagramlyk şertini (tangensiň $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ aralykda artýandygyny göz öňünde tutup) $\alpha \le \varphi$ görnüşde alarys.

Şeýlelik bilen, **eger $\vec{P}$ güýjüň täsir çyzygy sürtülme konusynyň içinden geçýän bolsa, onda jisim dynçlyk ýagdaýda durýar. Jisimiň hereketlenmegi üçin $\vec{P}$ güýjüň täsir çyzygy sürtülme konusynyň daşyndan geçmeli.**

Üns bereliň: soňky ýazylan netije $\vec{P}$ güýjüň ululygyna bagly däl.

Typma sürtülmesine degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Agramy G bolan "B" jisim ýylmanak däl, ýapgytlyk burçy α bolan tekizlikde dynçlykda durmaklygy üçin α burç nähili şerti kanagatlandyrmaly.



12.4-nji surat

Çözülişi. Jisim $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}$ güýçleriň täsirinde deňagramlykda dur. $\vec{G}$-jisimiň agramy, $\vec{N}$-ýapgyt tekizligiň normal reaksiýasy, $\vec{F}$-sürtülme güýji. Bu güýçler üçin deňagramlyk şertini ulanalyň:

$$\sum F_{kx} = 0: \ F - G \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (*)$$

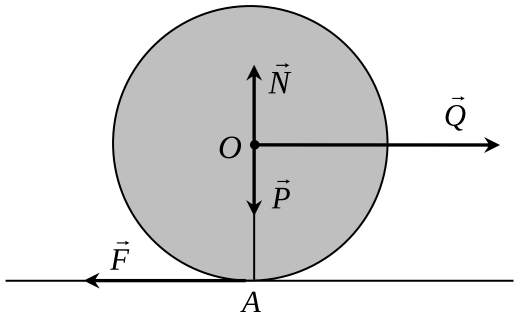
$$\sum F_{ky} = 0: \ N - G \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (**)$$

(*) deňlemeden, $F = G \cdot \sin\alpha$, (**) deňlemeden $N = G \cdot \cos\alpha$. Jisimiň typmazlygy üçin $F \le f \cdot N$ şert ýerine ýetmeli. Onda $G \cdot \sin\alpha \le f \cdot G \cdot \cos\alpha$. Bu ýerden, $tg\alpha \le f$, ýagny (tangens funksiýanyň $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ aralykda artýandygy sebäpli) $\alpha \le arctg\ f$ şert ýerine ýetmeli.

12.2. Tigirlenme sürtülmesi.

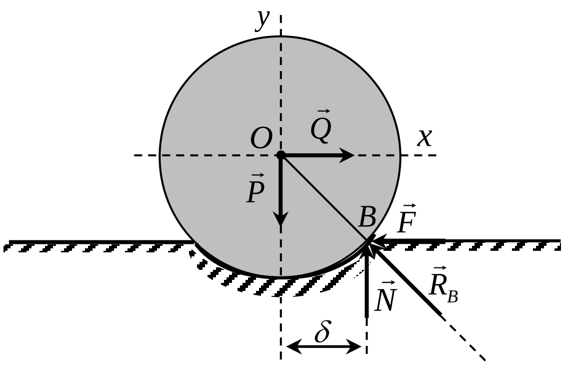
Kesgitleme. Bir jisim beýleki jisimiň üstünde tigirlenip hereket edende ýüze çykýan garşylyga tigirlenme sürtülmesi diýilýär.

Gorizontal tekizlikde duran agramy *P*, radiusy *R* silindrik katoga seredeliň. Katogyň okuna typma sürtülmesinden kiçi *Q* güýç bilen täsir edeliň, $Q < F_{max}$.



12.5-nji surat

A nokatda ululygy *Q* deň bolan $\vec{F}$ sürtülme güýji ýüze çykýar. Eger tekizligiň $\vec{N}$ normal reaksiýasyny *A* nokatda goýsak, bu güýç $\vec{P}$ güýji deňagramlaşdyrýar. $\vec{Q}$ we $\vec{F}$ güýçleriň düzýan jübüti katogy tigirlär. Diýmek, *Q* güýç näçe kiçi bolanda-da katok tigirlenmeli. Emma tejribede beýle bolup geçenok. Bu gapma-garşylygy şeýle düşündirip bolar: katogyň basyşy astynda daýanç tekizligi deformirlenýär, ýagny katok bilen tekizlik käbir meýdança boýunça galtaşýarlar. Daýanç tekizliginiň normal reaksiýasynyň täsir nokady süýşýär.



12.6-njy surat

Netijede $\left(\vec{Q},\vec{F}\right)$ jübüt $\left(\vec{P},\vec{N}\right)$ jübüt bilen deňagramlaşdyrylýar. Şeýlelikde, $\left(\vec{P},\vec{N}\right)$ jübütiň momenti, ýagny $m\left(\vec{P},\vec{N}\right)$ ululyk *tigirlenme momenti* diýlip atlandyrylýar.

Tejribeleriň esasynda Ş.Kulon tigirlenme momentiniň çäklidigini subut edýär. Tigirlenme momentiniň maksimal bahasy katogyň radiusyna bagly bolman, daýanç tekizliginiň normal reaksiýasyna göni proporsionaldygyny anyklaýar:

$$m=\delta\cdot N \qquad (12.3)$$

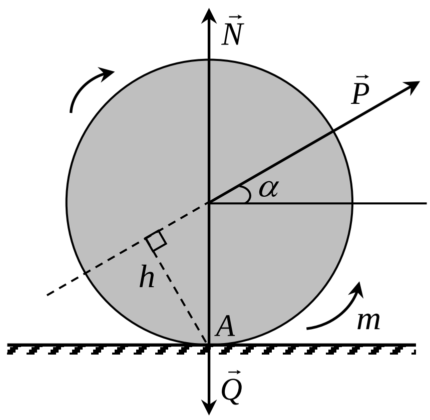
Proporsionallyk koeffisiýenti bolan δ ululyga **tigirlenme sürtülme koeffisiýenti** diýilýär.

$\vec{Q}$ güýjüň bahasyny ulaldyp, $\left(\vec{Q},\vec{F}\right)$ jübütiň momenti, ýagny $Q\cdot R$ ululyk $\delta\cdot N$ ululyga deň bolan pursatda katok tigirlenmäge başlar.

Bellik. δ tigirlenme sürtülme koeffisiýentiniň ölçeg birligi-uzynlyk birligi (sm, mm). δ ululyk galtaşýan jisimleriň materialyna bagly. Käbir materiallar üçin δ ululygyň bahalaryny getireliň: agaç bilen agaç 0,05-0,08 (sm), polat bilen polat 0,005 (sm).

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Agramy $Q=300\,N$, diametri 60 sm bolan katogyň deňölçegli tigirlenmegi üçin katogyň simmetriýa okuna goýlan P güýç näçä deň bolmaly. $\delta=0{,}5\,sm$, $\alpha=30^0$ - $\vec{P}$ güýç bilen gorizontal tekizligiň arasyndaky burç.



12.7-nji surat

Çözülişi. Deňölçegli tigirlenmegiň ýüze çykmagy üçin $\vec{P}$ güýjüň A nokada görä momenti $\delta\cdot N$ deň bolmaly: $m_A\left(\vec{P}\right)=P\cdot h=P\cdot R\cdot\cos\alpha$. Wertikal boýunça katok ornuny üýtgedenok, diýmek, $N+P\cdot\sin\alpha=Q$, bu ýerden $N=Q-P\cdot\sin\alpha$. Onda $P\cdot R\cdot\cos\alpha=\delta\cdot\left(Q-P\cdot\sin\alpha\right)$. Alnan, ýönekeý deňlemäni çözüp taparys:

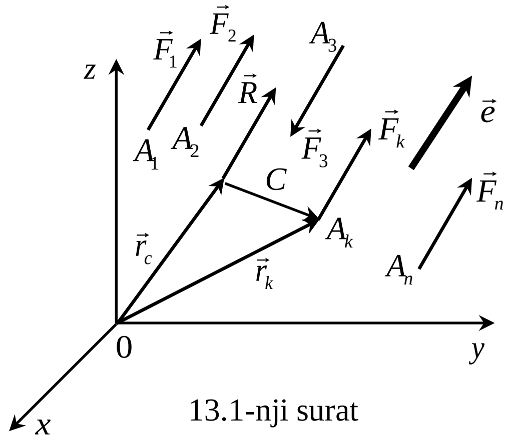
$$P=\frac{\delta\cdot Q}{R\cdot\cos\alpha+\delta\cdot\sin\alpha},\quad P=5{,}72\,N.$$

5-nji BAP
Agyrlyk merkezi.

§13. Parallel güýçleriň merkezi.

Parallel güýçleriň merkezini kesgitlemeklik meselesi mehanikanyň käbir meselelerinde, hususanda, jisimiň agyrlyk merkezini kesgitlemekde ulanylýar.

Degişlilikde $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$, ... , $A_n(x_n, y_n, z_n)$ nokatlarda goýlan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ parallel güýçlere seredeliň.



13.1-nji surat

Berlen wektorlara pararallel birlik $\vec{e}$ wektoryny alalyň we bu wektoryň ugruny položitel diýip kabul edeliň. Iki sany parallel güýji goşmak usulyny (§4) yzygider ulanyp, berlen parallel güýçler sistemasyny deňtäsiredijä getireliň. Netijede aşakda seredilýän üç ýagdaýyň ýüze çykmegy mümkin.

I. Sistema deňtäsiredijä getirilýär. Deňtäsiredijini $\vec{R}$ bilen belgiläliň. Deňtäsiredijiniň ululygy sistema girýän güýçleriň algebraik jemine deň, $R = \sum F_k$. Bu jemde $\vec{e}$ wektor bilen ugurdaş güýçleriň ululyklary položitel, garşylykly ugrukdyrylan güýçleriň ululyklary otrisatel alnan.

Goý, $\vec{R}$ güýç C nokatda goýlan bolsun. Bu nokadyň koordinatalaryny kesgitläliň. Ilki bilen käbir belgileri girizeliň: $\vec{r}_k - A_k$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory, $\vec{r}_c - C$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory.

$\vec{R} - \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisiligi sebäpli Warinýonyň teoremasy boýunça $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_C(\vec{F}_k) = \vec{m}_C(\vec{R})$. Emma $\vec{m}_C(\vec{R}) = \vec{0}$. Diýmek, $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_C(\vec{F}_k) = \vec{0}$

ýa-da:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_C(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k - \vec{r}_c) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_c \times \vec{F}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times (F_k \cdot \vec{e}) - \vec{r}_c \times \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \cdot F_k) \times \vec{e} - \vec{r}_c \times \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \vec{e} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \cdot F_k) \times \vec{e} - \vec{r}_c \times \left(\sum_{k=1}^{n} F_k \right) \cdot \vec{e} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k \cdot F_k) \times \vec{e} - \left(\vec{r}_c \cdot \sum_{k=1}^{n} F_k \right) \times \vec{e} =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k\cdot F_k-\vec{r}_c\cdot\sum_{k=1}^{n}F_k\right)\times\vec{e}=\vec{0}$$

Netijede şeýle deňlik alyndy:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k\cdot F_k-\vec{r}_c\cdot\sum_{k=1}^{n}F_k\right)\times\vec{e}=\vec{0} \tag{13.1}$$

Alnan deňligi seljereliň. Eger sistema girýän güýçleriň ählisini şol bir burça öwürsek we täze alnan sistema üçin ýokarda getirilen amallary ýerine ýetirsek, ýene-de (13.1) deňlige geleris. Ýöne (13.1) deňligiň çep bölegindäki ýaýyň içindäki aňlatma üýtgemeýär. $\vec{e}$ wektor güýçler bilen bir hatarda öwrülýär, ugruny üýtgedýär, ýagny (13.1) deňlik erkin ugurly $\vec{e}$ wektor üçin ýerine ýetmeli. Bu bolsa diňe ýaýyň içindäki aňlatma nola deň bolanda bolup biler. Diýmek,

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k\cdot F_k-\vec{r}_c\cdot\sum_{k=1}^{n}F_k=\vec{0} \tag{13.2}$$

Bu ýerden taparys:

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k\cdot F_k}{\sum_{k=1}^{n}F_k} \tag{13.3}$$

(13.3) deňligi dekart koordinatalarda ýazyp alarys:

$$x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot F_k}{\sum_{k=1}^{n}F_k}\ ,\quad y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k\cdot F_k}{\sum_{k=1}^{n}F_k}\ ,\quad z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_k\cdot F_k}{\sum_{k=1}^{n}F_k} \tag{13.4}$$

Koordinatalary (13.4) formula bilen kesgitlenýän nokada **parallel güýçleriň merkezi** diýilýär.

Goý, $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n$ güýçleriň S sanysy bir tarapa, $n-S$ sanysy garşylykly tarapa ugrukdyrylan bolsun. Umumylygy üýtgetmezden güýçleriň tertip belgisini üýtgedip, $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_S$ güýçler bir tarapa, $\vec{F}_{S+1},\vec{F}_{S+2},...,\vec{F}_n$ güýçler ters tarapa ugrukdyrylan görnüşde alyp bolýar.

Şertli belgileri girizeliň: $\vec{R}_1-\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_S\}$ güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi, $\vec{R}_2-\{\vec{F}_{S+1},\vec{F}_{S+2},...,\vec{F}_n\}$ güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi.

II. $\vec{R}_1,\vec{R}_2$ güýçler ululyklary boýunça deň bolup, dürli nokatlarda goýlan bolsa, onda seredilýän sistema jübüte getirilýär.

III. $\vec{R}_1,\vec{R}_2$ güýçler ululyklary boýunça deň bolup, bir nokatda goýlan bolsa, onda seredilýän sistema deňagramlaşan güýçler sistemasy bolup durýar.

§14. Jisimiň agyrlyk merkezi.

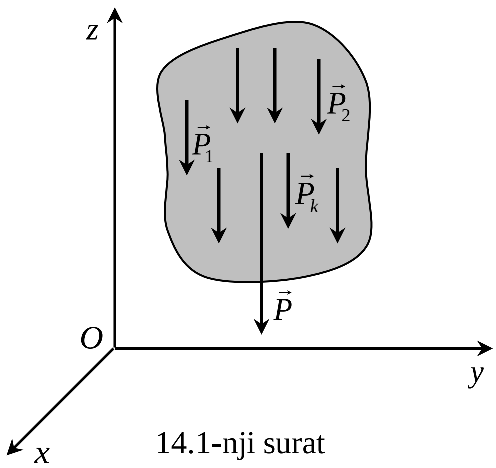
1. **Jisimiň agyrlyk merkezi hakynda düşünje.**
2. **Birjynsly jisimiň agyrlyk merkezi.**
3. **Käbir ýönekeý formaly jisimleriň agyrlyk merkezleri.**
4. **Agyrlyk merkezini kesgitlemegiň analitikii usuly.**

14.1. Jisimiň agyrlyk merkezi hakynda düşünje.

Bütindünýä dartylma kanunyna laýyklykda, Ýeriň üstüne ýakyn aralyklarda ýerleşýän jisimiň bölejiklerine Ýeriň dartyş güýji täsir edýär. Bu güýçler Ýeriň merkezine tarap ugrukdyrylan, ýagny bu güýçleriň täsir çyzyklary Ýeriň merkezinde kesişýärler. Emma bölejiklerden Ýeriň merkezine çenli uzaklyklar bölejikleriň arasyndaky uzaklyklardan ägirt uludygy sebäpli dartyş güýçlerini parallel hasaplap bolýar, ýagny Ýeriň jisimiň bölejiklerini dartyş güýçleri parallel güýçler sistemasy bolup durýar. Bu parallel güýçler sistemasynyň merkezine **jisimiň agyrlyk merkezi** diýilýär.

Jisimiň agyrlyk merkezi–jisim bilen bagly geometrik nokat bolup, jisimiň giňişlikde islendik ýagdaýynda onuň agyrlyk güýjüniň täsir çyzygy bu nokatdan geçýär.

Agyrlyk merkezi jisimiň formasyna we jisimdäki material bölejikleriň paýlanyşyna bagly. Jisimiň bölejikleriniň agramlaryny $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_k$ ... bilen belgiläliň.



14.1-nji surat

Elbetde, jisimiň agramy bölejikleriň agramlarynyň jemine deň, $P = \sum P_k$.

Jisimiň agyrlyk merkezi *C* nokat $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_k, ...$ parallel güýçleriň merkezi hökmünde (13.4) formulanyň esasynda

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{P} \quad , \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k}{P} \quad , \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k}{P} \qquad (14.1)$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde $x_k, y_k, z_k - \vec{P}_k$ güýjüň goýlan nokadynyň koordinatalary.

Bellik. Jisimiň agyrlyk merkezi jisime degişli bolman hem biler, meselem, halka üçin.

14.2. Birjynsly jisimiň agyrlyk merkezi.

Birjynsly jisimiň agramy jisimiň göwrümine göni proporsional $P_k = \gamma \cdot \Delta V_k$, bu ýerde ΔV_k–bölejigiň göwrümi, γ–hemişelik ululyk bolup, göwrümiň bir birliginiň agramyna deň.

P_k–ny (14.1) formulada goýup alarys:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma \cdot \Delta V_k \cdot x_k}{\gamma \cdot V} = \frac{\gamma \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta V_k}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta V_k}{V}$$

Şuňa meňzeşlikde, y_c–ni, z_c-ni kesgitläp,

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta V_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta V_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \Delta V_k}{V} \tag{14.2}$$

formulany alarys, bu ýerde *V*-jisimiň göwrümi.

Ýokardaka meňzeşlikde, tekiz jisimiň agyrlyk merkezi üçin

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta S_k}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta S_k}{S} \tag{14.3}$$

formulany alarys, bu ýerde ΔS_k–jisimiň bölejiginiň meýdany, *S*–jisimiň meýdany.

Şeýle-de, material egri çyzygyň agyrlyk merkezi üçin

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta l_k}{l}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta l_k}{l}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \Delta l_k}{l} \tag{14.4}$$

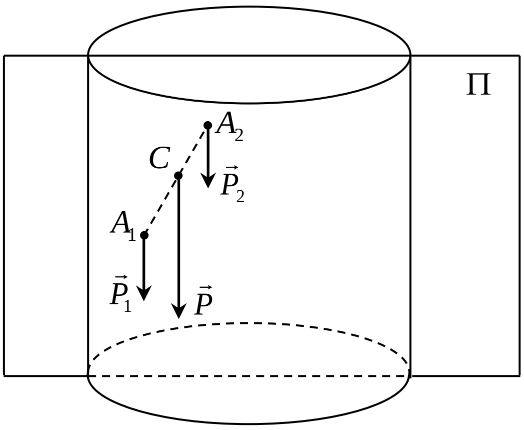
formulany alarys, bu ýerde Δl_k–egriniň bölejiginiň uzynlygy, *l*–egriniň uzynlygy.

Elbetde, jisimiň tükeniksiz köp bölejiklere bölünýändigi sebäpli agyrlyk merkezi kesgitlenende (14.2), (14.3), (14.4) formulalardaky jemler kesgitli itegrala öwrülýärler.

Şu ýerde jisimiň agyrlyk merkezini kesgitlemekde gerekli teoremany getireliň.

Teorema. Eger birjynsly jisimiň simmetriýa tekizligi, simmetriýa oky ýa-da simmetriýa nokady bar bolsa, onda jisimiň agyrlyk merkezi degişlilikde simmetriýa tekizliginde, simmetriýa okunda ýa-da simmetriýa nokadynda ýerleşýär.

Subudy. Goý, Π–jisimiň simmetriýa tekizligi bolsun.



14.2-nji surat

Jisimiň Π tekizlige görä simmetrikdigi sebäpli Π tekizlikden bir tarapda alnan islendik bölejige Π tekizligiň beýleki tarapynda agramy bu bölejigiň agramyna deň bolan simmetrik bölejik bar.

Π tekizligiň bir tarapynda A_1 bölejigi alalyň. A_2–oňa simmetrik bölejik. Bu bölejiklere ululyklary deň bolan $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ agyrlyk güýçleri täsir edýär. $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ güýçleriň deňtäsiredijisi bolan $\vec{P}$ güýç A_1A_2 kesimiň ortasynda, ýagny simmetriýa tekizliginde goýlan.

Her bir jübüt bölejikler üçin agyrlyk güýçlerini goşup, Π tekizlikde ýatýan parallel güýçler sistemasyny alarys. Elbetde, bu güýçleriň deňtäsiredijisi hem Π tekizlikde ýatýar.

Haçanda jisimiň simmetrýa oky ýa-da simmetriýa nokady bolanda teorema edil şuňa meňzeşlikde subut edilýär.

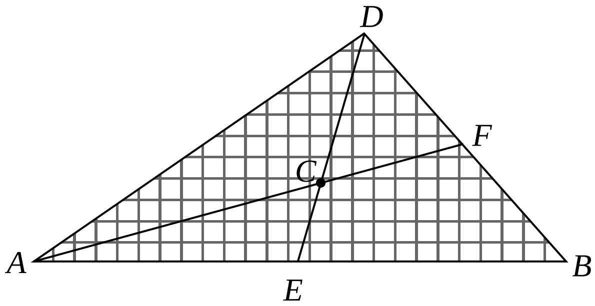
1-nji netije. Parallelogramyň agyrlyk merkezi onuň diagonallarynyň kesişmesinde ýerleşýär.

2-nji netije. Deňtaraply köpburçlugyň, tegelegiň, ellipsiň we şaryň agyrlyk merkezi olaryň geometrik merkezlerinde ýerleşýär.

14.3. Käbir ýönekeý formaly jisimleriň agyrlyk merkezleri.

I. Üçburçlugyň agyrlyk merkezi.

ABD üçburçlugy (14.3-nji surat) *AB* esasyna parallel göni çyzyklar bilen köpsanly bölejiklere böleliň.



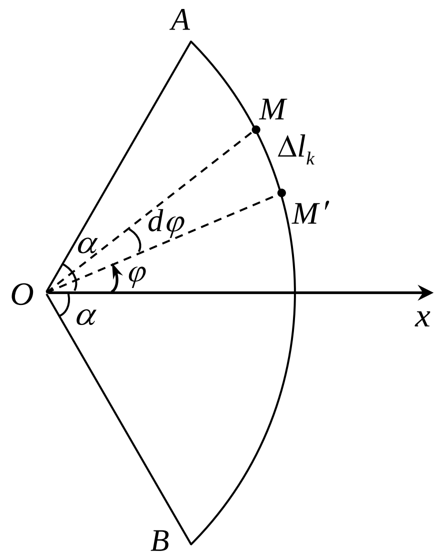
14.3-nji surat

Her bir bölejigi kesim hökmünde kabul edip bolar. Kesimiň agyrlyk merkezi onuň ortasynda (simmetriýa nokady) ýerleşýär. Diýmek, üçburçlugyň agyrlyk merkezi bu kesimleriň üstünden geçýän çyzykda, ýagny *DE* medianada ýerleşýär. Bu üçburçlugy *BD* esasa parallel gönüçyzyklar bilen bölsek, onda üçburçlugyň agyrlyk merkezi *AF* medianada ýerleşýär diýen netijä geleris. Onda **üçburçlugyň agyrlyk merkezi üçburçlugyň medianalarynyň kesişmesi bolan *C* nokatda ýerleşýär. *C* nokat medianalary** $1:2$ **gatnaşykda bölýär.**

Bellik. Köpburçlugyň agyrlyk merkezi kesgitlenende köpburçlugy ücburçluklara bölmeli. Köpburçlugyň agyrlyk merkezi alnan üçburçluklaryň agyrlyk güýçleriniň (parallel güýçler) merkezi hökmünde tapylýar.

II. Töweregiň dugasynyň agyrlyk merkezi.

R radiusly töweregiň *AB* dugasyna seredeliň. Merkezi *AOB* burç 2α–a deň bolsun, $\angle AOB = 2\alpha$



14.4-nji surat

Koordinatalar başlangyjyny töweregiň merkezinde (O) alyp, Ox okuny AOB burçuň bissektrisasy boýunça ugrukdyralyň. Ox ok AB duganyň simmetriýa oky bolup durýar. Diýmek, duganyň agyrlyk merkezi bolan C nokat Ox okda ýerleşýär. Bu nokadyň koordinatasyny tapalyň. AB dugany bölejiklere böleliň. (14.4) formuladan:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta l_k}{l}$$

Bu ýerde $\Delta l_k - MM'$ elementar bölejigiň uzynlygy, $l - AB$ duganyň uzynlygy. Bölejikleriň sany tükeniksiz artanda sanawjydaky jem AB egri boýunça alnan integrala öwrüler, ýagny

$$x_c = \frac{1}{l}\int_{AB} x\,dl$$

MM' duganyň uzynlygy tükeniksiz kiçelende MM' duga bir nokada çekilýär we bu bölejigiň ýerleşen ýeri φ burç bilen kesgitlenýär. Onuň koordinatasy $x = R\cos\varphi$, uzynlygy $dl = R\,d\varphi$. Onda ýokarda ýazylan deňlikden alarys:

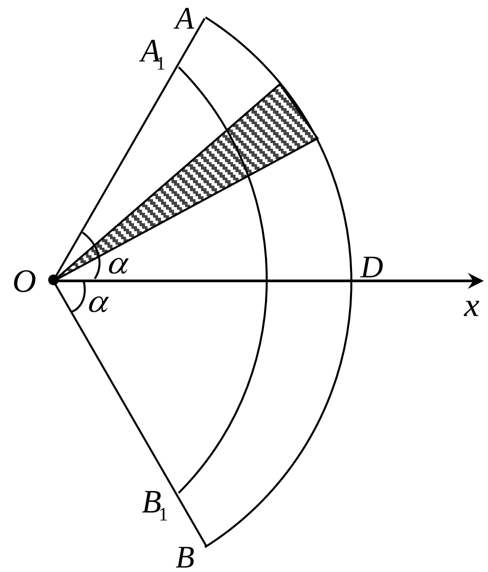
$$x_c = \frac{1}{l}\int_{AB} x\,dl = \frac{1}{l}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cdot\cos\varphi\cdot R\,d\varphi = \frac{R^2}{l}\cdot\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R^2\sin\alpha}{l} = \frac{2R^2\sin\alpha}{R\cdot 2\alpha} = \frac{R\cdot\sin\alpha}{\alpha},$$

$$x_c = \frac{R\cdot\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (14.5)$$

Diýmek, **töweregiň dugasynyň agyrlyk merkezi onuň simmetriýa okunda bolup, töweregiň merkezinden $\frac{R\cdot\sin\alpha}{\alpha}$ aralykda ýerleşýär.**

III. Tegelegiň sektorynyň agyrlyk merkezi.

R radiusly tegelegiň merkezi burçy 2α bolan $OADB$ sektoryna seredeliň. Koordinatalar başlangyjyny tegelegiň merkezinde (O) alyp, Ox okuny AB duganyň ortasy D nokatdan geçireliň.



14.5-nji surat

Bu sektory özara deň n sany sektora böleliň. n tükeniksiz artanda her bir sektory deňýanly üçburçluk hökmünde kabul edip bolýar. Sektorlaryň agyrlyk merkezleri $\frac{2}{3}R$ radiusly töweregiň A_1B_1 dugasynda ýerleşýärler. Sektorlaryň deňligi sebäpli olaryň agramlary hem deň. Diýmek, goýlan mesele (agyrlyk merkezini kesgitlemek) A_1B_1 duganyň nokatlarynda goýlan parallel güýçleriň merkezini tapmaklyga ýa-da başgaça aýdylanda radiusy $\frac{2}{3}R$ bolan A_1B_1 duganyň agyrlyk merkezini tapmaklyga syrykýar.

(14.5) formulada R-e derek $\frac{2}{3}R$–i goýup alarys:

$$x_c = \frac{2R\cdot\sin\alpha}{3\alpha} \tag{14.6}$$

Diýmek, **tegelegiň sektorynyň agyrlyk merkezi onuň simmetriýa okunda bolup, tegelegiň merkezinden** $\frac{2R\cdot\sin\alpha}{3\alpha}$ **aralykda ýerleşýär.**

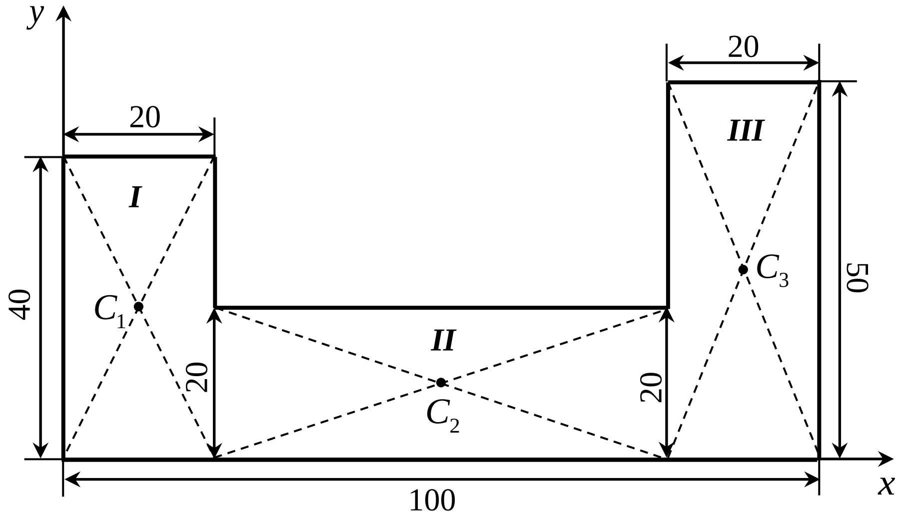
14.4. Agyrlyk merkezini kesgitlemegiň analitikii usuly.

Çylşyrymly geometrik formaly jisimiň agyrlyk merkezi kesgitlenende jisimi agyrlyk merkezleri ýeňillik bilen kesgitlenýän figuralara bölýärler. Her bir bölegiň agyrlyk merkezi kesgitlenenden soň jisimiň agyrlyk merkezini kesgitlemek üçin jisimiň görnüşine laýyklykda (14.2), (14.3) ýa-da (14.4) formula ulanylýar. Bu formulalardaky $\Delta V_k, \Delta S_k, \Delta l_k$ ululyklar degişlilikde jisimi düzýän bölekleriň göwrümi, meýdany we uzynlygy bolup durýar.

Eger seredilýän jisimiň oýulan ýeri bar bolsa, onda oýulan ýeri ýok diýip kabul etmeli, ýöne ýokarda görkezilen usul bilen hasaplama işlerinde oýulan ýeriň göwrümini (meýdanyny, uzynlygyny) otrisatel hasap etmeli.

Getirilen usulyň ulanylyşyna degişli mysallara seredip geçeliň.

Mysal. 14.6-njy suratda görkezilen tekiz figuranyň agyrlyk merkezini tapmaly. Gerek bolan ölçegler suratda görkezilen.



14.6-njy surat

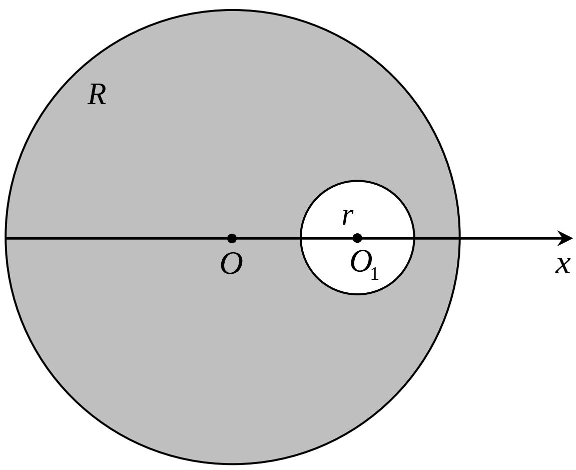
Çözülişi. Berlen figurany I , II , III gönüburçluklara böleliň. Her bir gönüburçlygyň agyrlyk merkezi onuň diagonallarynyň kesişýän nokatlarynda, degişlilikde C_1, C_2, C_3 nokatlar bilen görkezilen. Gönüburçluklaryň meýdanlaryny S_1, S_2, S_3 bilen belgiläliň. Onda:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{3} x_k \cdot S_k}{\sum_{k=1}^{3} S_k} = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 + x_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{10 \cdot 800 + 50 \cdot 1200 + 90 \cdot 1000}{800 + 1200 + 1000} \approx 52{,}66 \ ,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{3} y_k \cdot S_k}{\sum_{k=1}^{3} S_k} = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 + y_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 + S_3} == \frac{20 \cdot 800 + 10 \cdot 1200 + 25 \cdot 1000}{800 + 1200 + 1000} \approx 17{,}66$$

netijäni alarys.

Mysal. Oýulan tegelegiň agyrlyk merkezini kesgitlemeli. Gerekli ölçegler: $R = 50sm$, $r = 10sm$, O-tegelegiň merkezi, O_1–oýulyp alnan tegelegiň merkezi, $OO_1 = 25sm$.



14.7-nji surat

Çözülişi. Bu figuranyň simmetriýa oky bar. Koordinatalar başlangyjyny O nokatda alyp, simmetriýa okuny Ox ok hökmünde alalyň. Elbetde, figuranyň agyrlyk merkezi Ox (simmetriýa oky) okunda ýerleşýär.

Tegelegiň meýdany $S_R = \pi \cdot R^2$; oýulup alnan tegelegiň meýdany $S_r = \pi \cdot r^2$. Onda:

$$x_C = \frac{x_O \cdot S_R + x_{O_1} \cdot \left(-S_r\right)}{S_R + \left(-S_r\right)} = \frac{0 \cdot \pi \cdot R^2 + 25 \cdot \left(-\pi \cdot r^2\right)}{\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2} = \frac{-25 \cdot \pi \cdot 10^2}{50^2 \cdot \pi - 10^2 \cdot \pi} \approx -1$$

Agyrlyk merkeziniň koordinatasy $x_C = -1$.