3-nji BÖLÜM
Dinamika

Dinamika–nazary mehanikanyň täsir edýän güýçleriň esasynda material obýektleriň hereketlerini öwrenýän bölümidir.

9-njy BAP
Material nokadyň dinamikasy.
§25. Dinamikanyň esasy düşünjeleri we kanunlary.

1. **Dinamikanyň esasy düşünjeleri.**
2. **Dinamikanyň esasy kanunlary.**

25.1. Dinamikanyň esasy düşünjeleri.

Material nokat we mehaniki sistema düşünjelerini getireliň.

Material nokat–ornuny geometrik nokat hökmünde kesgitläp bolýan jisim. Başgaça aýdylanda, öwrenilýän şertlerine görä ölçegleri ujypsyz bolan jisim.
Mehaniki sistema–hereketleri biri-birine bagly bolan material nokatlaryň tükenikli ýa-da tükeniksiz köplügi.

Mehaniki sistemanyň mysaly hökmünde Gün sistemasyna girýän planetalaryň toplumyny getirip bolar.

Dinamikada seredilýän esasy iki mesele:

1) Hereket deňlemesi berlen material nokada täsir edýän güýji kesgitlemek;
2) Nokada täsir edýän güýçler belli bolup, onuň hereket deňlemesini kesgitlemek.

25.2. Dinamikanyň esasy kanunlary.

Dinamikanyň esasyny tutýan kanunlary seljereliň.
1-nji kanun (inersiýa kanuny). Eger material nokada güýç täsir etmese ýa-da täsir edýän güýçler kompensirlenýän bolsa, onda bu material nokat dynçlyk ýagdaýyny ýa-da gönüçyzykly, deňölçegli hereketini saklaýar, ýagny $\vec{F}=\vec{0}$ bolsa, onda $\vec{V}=const$.

Inersiýa kanunynyň ýerine ýetýan hasaplanyş sistemasyna **inersial hasaplanyş sistemasy** diýilýär.

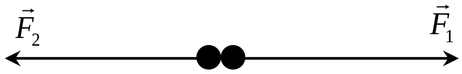
Inersial hasaplanyş sistemasynyň mysallary hökmünde şu aşakdakylary görkezip bolar:
Başlangyjy günüň merkezinde, oklary “gozganmaýan” ýyldyzlara tarap ugrukdyrylan **geliosentrik** hasaplanyş sistemasy.
Ýer bilen bagly **geosentrik** hasaplanyş sistemasy.
Ikinji kanuny getirmegimizden öň inertlilik we massa ýaly düşünjeleri seljereliň.
Inertlilik–material nokadyň güýjüň täsiri astynda tizlenme almak häsiýeti;
Massa–material nokadyň inertliliginiň derejesini kesgitleýän ölçeg. Massa-skalýar ululyk bolup, nokadyň islendik hereketinde üýtgemeýär. Nýutonyň kesgitlemesi boýunça (mehanikanyň filosofiki başlangyçlary), massa-“jisimdäki maddanyň mukdary”

2-nji kanun. Inersial hasaplanyş sistemasyna görä material nokadyň tizlenmesi täsir edýän güýje göni proporsional, bu güýç bilen ugurdaş, nokadyň massasyna ters proporsional:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{25.1}$$

bu ýerde $\vec{F}$ -nokada täsir edýän güýç, m -nokadyň massasy, $\vec{a}$ -nokadyň tizlenmesi.
3-nji kanun. Material nokatlaryň biri-birine bolan täsirleri (güýçler) bir göni çyzyk boýunça garşylykly ugrukdyrylandyrlar, ululyklary boýunça deňdirler:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{25.2}$$



$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ güýçler dürli material nokatlara täsir edýändikleri sebäpli deňagramlaşmaýarlar.
4-nji kanun (täsirleriň bagly dälligi). Material nokadyň birnäçe güýçleriň täsirinde alýan tizlenmesi bu güýçleriň aýratynlykdaky täsirlerinde alýan tizlenmeleriniň wektorlaýyn jemine deň.

Goý, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$–material nokada täsir edýän güýçler bolsun. Belgiläliň: $\vec{F} - \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\}$ güýçler sistemasynyň deňtäsiredijisi, ýagny $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\} \sim \vec{F}$.

$\vec{F}$ güýjüň täsirinde nokat $\vec{a}$ tizlenme alýan bolsun. Onda 2-nji kanun boýunça; $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. $\vec{a}_i$ $(i = \overline{1, n})$– $\vec{F}_i$ güýjüň täsirinde alynýan tizlenme. Diýmek, 2-nji kanuna laýyklykda:

$$\vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_i \quad i = \overline{1, n} \tag{25.3}$$

Onda:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \tag{25.4}$$

Bellik. Nazaryýetiň beýan edilişini tertipleşdirmek maksady bilen dinamika iki bölüme bölünýär: **nokadyň dinamikasy hem-de mehaniki sistemanyň dinamikasy.**

Nokadyň dinamikasy
§26. Material nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleri.

1. **Material nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleri.**
2. **Dinamikanyň esasy iki meselesiniň matematiki goýluşy we çözülişi.**
3. **Material nokadyň gönüçyzykly hereket etmekligi üçin zerur we ýeterlik şertler.**

26.1. Material nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleri.

Dinamikanyň ikinji kanunyny häsiýetlendirýän $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ deňlemä material nokadyň dinamikasynyň esasy deňlemesi hem diýilýär.

Material nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýç nokadyň ornuna, tizligine we wagta bagly bolup biler, ýagny $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.

Mälim bolşy ýaly, nokadyň tizlenmesi onuň radius-wektorynyň ikinji önümine deň:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Onda dinamikanyň esasy deňlemesinden material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň wektor görnüşini alarys:

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right) \qquad (26.1)$$

Material nokadyň tizlenmesiniň dekart oklary boýunça düzüjileriniň degişli koordinatanyň ikinji önüme deňdigini, ýagny $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ deňlikleri ulanyp, hereketiň differensial deňlemesini dekart koordinatalarda alarys:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = F_x\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \\ m\,\ddot{y} = F_y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \\ m\,\ddot{z} = F_z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \end{cases} \qquad (26.2)$$

Material nokadyň tizlenmesiniň tebigy oklar boýunça $a_\tau = \ddot{s}$, $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$, $a_b = 0$ düzüjilerini, göz öňünde tutup, material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini tebigy koordinatalarda alarys:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau \quad , \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n \quad , \quad F_b = 0 \ , \qquad (26.3)$$

bu ýerde s – material nokadyň duga koordinatasy; ρ– nokadyň traýektoriýasynyň nokatdaky egrilik radiusy; F_τ– nokada täsir edýän güýjüň galtaşma düzüjisi; F_n– nokada täsir edýän güýjüň normal düzüjisi; F_b– nokada täsir edýän güýjüň binormal düzüjisi.

26.2. Dinamikanyň esasy iki meselesiniň matematiki goýluşy we çözülişi.

Dinamikada seredilýän esasy iki meselä we olara degişli käbir mysallara seredip geçeliň.

Dinamikanyň 1-nji meselesi. *m* massaly nokadyň hereket deňlemesi belli bolup, nokada täsir edýän güýçleriň deňtäsiredijisini kesgitlemeli. Bu meselede nokadyň hereket deňlemesi berilýär:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (26.4)$$

Nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýji tapmaklyk talap edilýär. Bu meseläniň çözülişi nokadyň hereket deňlemesini iki gezek differensirlemek bilen amala aşyrylýar:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x}(t) \\ F_y = m\ddot{y}(t) \\ F_z = m\ddot{z}(t) \end{cases} \qquad (26.5)$$

Bu ýerde F_x, F_y, F_z– nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýjüň dekart koordinata oklary boýunça düzüjileri.

Mysal. *m* massaly nokadyň hereket deňlemesi berlen:

$$\begin{cases} x = a\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) \\ y = a\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) \end{cases} \tag{*}$$

bu ýerde $a, k = const$, $a > 0$, $k > 0$; nokada täsir edýan $\vec{F}$ güýji kesgitlemeli.

Çözülişi. Nokat $x^2 - y^2 = 4a^2$ giperbola boýunça hereket edýar. Hereket deňlemesinden $t = 0$ wagt pursatda nokadyň koordinatalaryny taparys:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = 2a \\ y_0 = y(0) = 0 \end{cases}$$

(*) deňlemäni iki gezek differensirläp,

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} = mak^2\left(e^{kt} + e^{-kt}\right) \\ F_y = m\ddot{y} = mak^2\left(e^{kt} - e^{-kt}\right) \end{cases}$$

netijä geleris ýa-da $F_x = mk^2x$, $F_y = mk^2y$. Nokada täsir edýän $\vec{F} = \left(F_x, F_y\right) = mk^2(x, y) = mk^2\vec{r}$ güýç nokadyň radius-wektoryna göni proporsional.

Dinamikanyň 2-nji meselesi. Bu meselede *m* massaly nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýç berilýär. Nokadyň hereket deňlemesini kesgitlemeklik talap edilýär. $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t\right)$ – nokada täsir edýän güýç; $\vec{r}(t)$ wektory kesgitlemeli.

Belli bolşy ýaly, nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi dekart koordinatalarda

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = F_x\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \\ m\,\ddot{y} = F_y\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \\ m\,\ddot{z} = F_z\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \end{cases} \tag{26.6}$$

görnüşde berilýär:

2-nji meseläniň çözülişi (26.6) differensial deňlemeler sistemasyny integrirlemek bilen amala aşyrylýar. (26.6) deňlemeler sistemasynyň umumy çözüwine alty sany erkin $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ hemişelik girýär:

$$\begin{cases} x = x\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\ y = y\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\ z = z\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \end{cases} \tag{26.7}$$

Nokadyň tizliginiň dekart koordinata oklaryna proýeksiýalary:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dot{x} = \dot{x}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\ \upsilon_y = \dot{y} = \dot{y}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \\ \upsilon_z = \dot{z} = \dot{z}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right) \end{cases} \tag{26.8}$$

Täsir edýän güýjüň berilmegi bilen alty sany erkin hemişelige bagly bolan hereketler köplügi kesgitlenýär. Berlen meselede erkin hemişelikleri kesgitlemek üçin başlangyç şertler, ýagny berlen wagt pursatynda $(t = 0)$ nokadyň koordinatalary we tizligi berilmeli. Başlangyç şertler:

$$t = 0 : \begin{cases} x = x_0 \quad , \; y = y_0 \quad , \; z = z_0 \\ \dot{x} = \upsilon_{Ox} \, , \; \dot{y} = \upsilon_{Oy} \, , \; \dot{z} = \upsilon_{Oz} \end{cases} \tag{26.9}$$

(26.9) deňligi (26.7), (26.8) deňlemelerde goýup, alty sany algebraik deňlemeden ybarat sistemany alarys:

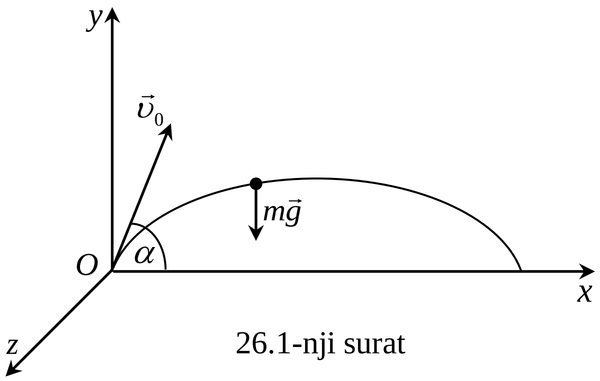
$$\begin{cases} x_0 = x(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ y_0 = y(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z_0 = z(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \upsilon_{Ox} = \dot{x}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \upsilon_{Oy} = \dot{y}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ \upsilon_{Oz} = \dot{z}(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{cases} \tag{26.10}$$

(26.10) deňlemeler sistemasyny çözüp, tapylan $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ hemişelikleri (26.7) deňlikde ýerine goýup, meseläniň çözüwini taparys.

Bellik. Dinamikanyň 2-nji meselesi matematikanyň “Differensial deňlemeler” bölüminde “Koşi meselesi” diýlip atlandyrylýar.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Massasy *m* bolan material nokat gorizonta α burç astynda $\vec{\upsilon}_0$ başlangyç tizlik bilen zyňylýar. Nokadyň hereket deňlemesini kesgitlemeli (howanyň garşylyk güýjüni göz öňünde tutmaly däl).



26.1-nji surat

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny nokadyň zyňylan nokadynda alyp, *xy* tekizligini wertikal, *xz* tekizligini gorizontal alalyň. Başlangyç şertler:

$$t = 0: \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \dot{x} = \upsilon_{Ox} = \upsilon_O \cos\alpha \\ \dot{y} = \upsilon_{Oy} = \upsilon_O \sin\alpha \\ \dot{z} = \upsilon_{O\,z} = 0 \end{cases}$$

Täsir edýän $\vec{P} = m\vec{g}$ güýç wertikal aşak ugrukdyrylan, $P_x = 0$, $P_y = -mg$, $P_z = 0$

Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \tag{*}$$

görnüşde bolar. Bu deňlemäni bir gezek integrirläp taparys:

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon_x = C_1 \\ \dot{y} = \upsilon_y = -gt + C_2 \\ \dot{z} = \upsilon_z = C_3 \end{cases} \qquad (**)$$

Alnan deňligi ýene bir gezek integrirläp (*) deňlemäniň

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_4 \\ \dot{y} = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_5 \\ \dot{z} = C_3 t + C_6 \end{cases} \qquad (***)$$

umumy çözüwini taparys. Başlangyç şertleri (**), (***) deňlemelerde ýerine goýup, alnan deňlemeler sistemasyndan $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ hemişelikleri kesgitläris:

$$C_1 = \upsilon_O \cos\alpha \ , \ C_2 = \upsilon_O \sin\alpha \ , \ C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

Onda hereketi öwrenilýän nokadyň hereket deňlemesi

$$\begin{cases} x = \upsilon_O \cos\alpha \cdot t \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + \upsilon_O \sin\alpha \cdot t \\ z = 0 \end{cases}$$

görnüşde bolar. Alnan deňlemeden görşümiz ýaly, nokat wertikal tekizlikde $(z = 0)$ hereket edýär. Bu deňlemede t parametri birinji deňlemede x-iň üsti bilen aňladyp, ikinji deňlemede ýerine goýsak, nokadyň traýektoriýasynyň

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

deňlemesini kesgitläris. Bu deňleme parabolanyň deňlemesi.

26.3. Material nokadyň gönüçyzykly hereket etmekligi üçin zerur we ýeterlik şertler.

Goý, nokat Ox oky boýunça hereket edýan bolsun. Nokadyň traýektoriýasynyň deňlemesi:

$$y = 0 \ , \ z = 0 \qquad (26.11)$$

Onda (26.6) deňlikden

$$F_y = 0 \ , \ F_z = 0 \qquad (26.12)$$

bolmalydygyny alarys. Diýmek, nokada täsir edýän güýçleriň deňtäsiredijisi Ox oky boýunça ugrukdyrylan bolmaly. Ýöne, bu şert nokadyň göňüçyzykly hereket etmekligi üçin ýeterlik şert däl. Hakykatdan hem, (26.12) deňlik ýerine ýetende (26.6) deňligiň ikinji we üçünji deňlemelerinden alarys:

$$\ddot{y} = 0 \ , \ \ddot{z} = 0 \qquad (26.13)$$

Bu deňlikleri integrirläp taparys:

$$\begin{cases} \dot{y} = C_1 \ , \ \dot{z} = C_3 \\ y = C_1 t + C_2 \ , \ z = C_3 t + C_4 \end{cases} \qquad (26.14)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 hemişelikleri kesgitlemek üçin

$$t=0:\ \ y=0\ ,\ z=0\ ,\ \dot{y}=\upsilon_{Oy}\ ,\ \dot{z}=\upsilon_{Oz} \tag{26.15}$$

başlangyç şertlerden peýdalanmaly, ýagny (26.15) başlangyç şertleri (26.14) deňlikde ornuna goýup, gözlenilýän hemişelikleri taparys:

$$C_1=\upsilon_{Oy}\ ,\ C_2=0\ ,\ C_3=\upsilon_{Oz}\ ,\ C_4=0$$

Şeýlelikde, nokadyň hereket deňlemesi

$$y=\upsilon_{Oy}\cdot t\ ,\ \ z=\upsilon_{Oz}\cdot t \tag{26.16}$$

görnüşde bolar.

(26.16) deňlik (26.11) deňlik bilen diňe $\upsilon_{Oy}=\upsilon_{Oz}=0$ bolanda gabat gelýär. Bu ýerden **material nokadyň göni çyzykda hereket etmekligi üçin nokada täsir edýän güýjüň we nokadyň başlangyç tizliginiň bu göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan bolmagynyň zerur we ýeterlikdigi gelip çykýar.**

Ox oky boýunça hereket edýan material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t\,,x\,,\dot{x}) \tag{26.17}$$

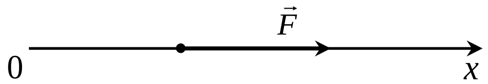
Indiki paragrafda $\vec{F}$ güýjüň hususy görnüşleri üçin (26.17) deňlemäniň çözülişini öwreneris.

§27. Material nokadyň gönüçyzykly hereketi.

1. **Material nokadyň gönüçyzykly hereketiniň differensial deňlemesi.**
2. **Material nokadyň wagta bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.**
3. **Material nokadyň koordinata bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.**
4. **Material nokadyň tizlige bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.**

27.1. Material nokadyň gönüçyzykly hereketiniň differensial deňlemesi.

Goý, material nokat $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda göni çyzykda hereket edýän bolsun. Bu göni çyzygy *x* oky hökmünde kabul edeliň. Elbetde, §26-da bellenip geçilişi ýaly, $\vec{F}$ güýç *x* oky boýunça ugrukdyrylan bolmaly.



27.1-nji surat

Dinamikanyň ikinji kanunynyň esasynda *x* oky boýunça hereket edýän material nokadyň differensial deňlemesini:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t\,,x\,,\dot{x}) \tag{27.1}$$

görnüşde ýazalyň. $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$ deňligi ulanyp aşakda getirilen özgertme bilen (27.1) deňligi başga görnüşe getireliň:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=m\frac{d\upsilon}{dt}$$

Bu deňligi ulanyp, (27.1) deňlemäni

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F(t,x,\upsilon) \tag{27.2}$$

görnüşde ýazalyň.

Umumy ýagdaýda, ýagny $\vec{F}$ güýç wagta, koordinata we tizlige bagly bolanda (27.2) deňlemäni integrirlemek matematiki kynçylyklara getirýär. Köp halatlarda bu deňlemäni yzygider ýakynlaşma usuly bilen çözmeli bolýar.

Indiki punktlarda nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýjüň käbir hususy görnüşleri üçin (27.2) deňlemäni integrirlemegiň usullary bilen tanyşarys.

27.2. Material nokadyň wagta bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.

Goý, nokada täsir edýän güýç wagta bagly bolsun, ýagny $F=F(t)$. Onda (27.2) deňlik

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F(t) \tag{27.3}$$

görnüşe eýe bolar.

Bu deňlemäni üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl etmek usuly bilen çözeliň.

$$m\,d\upsilon=F(t)dt$$

Alnan deňlemäni degişli çäklerde integrirläliň:

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}dV=\int_0^t F(\tau)d\tau\ , \tag{27.4}$$

υ_0-nokadyň başlangyç tizligi. $F(t)$ belli funksiýalygy üçin (27.4) deňlemäniň sag bölegindäki integraly hasaplap bolýar. Netijede *t* wagta bagly funksiýa alynýar. Onda $m\upsilon-m\upsilon_0=\Phi(t)$; bu ýerde $\Phi(t)=\int_0^t F(\tau)d\tau$. Bu deňlemeden υ-ni taparys:

$$\upsilon=\upsilon_0+\frac{1}{m}\Phi(t) \tag{27.5}$$

(27.5) deňlik nokadyň tizliginiň wagta bagly üýtgeýşini görkezýär. (27.5) deňlemede tizligi $\frac{dx}{dt}$ bilen çalşyralyň we üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl etmek usulyny ulanalyň:

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_0+\frac{1}{m}\Phi(t)\quad ,\quad dx=\left(\upsilon_0+\frac{1}{m}\Phi(t)\right)dt$$

Alnan deňlemäni degişli çäklerde integrirläp, nokadyň hereket deňlemesini kesgitläris:

$$\int_{x_0}^{x}ds=\int_0^t\left(\upsilon_0+\frac{1}{m}\Phi(\tau)\right)d\tau\,,$$

x_0-nokadyň başlangyç koordinatasy. Bu ýerden

$$x=x_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{m}\int_0^t\left(\upsilon_0+\frac{1}{m}\Phi(\tau)\right)d\tau \tag{27.6}$$

Alnan deňlik nokadyň koordinatasynyň wagta bagly üýtgeýşini görkezýär. Başgaça aýdylanda, (27.6) deňleme nokadyň hereket deňlemesidir.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Nokada täsir edýän güýç berlen: $F = p\sin(kt)$, $k, p = const$. $t = 0$ bolanda, $x = x_0$, $\upsilon = \upsilon_0$. Nokadyň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = p\sin(kt)$ ýa-da $md\upsilon = p\sin(kt)dt$. Bu deňlemäni degişli çäklerde integrirläliň:

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} dV = p\int_0^t \sin(k\tau)d\tau$$

$$m\upsilon - m\upsilon_0 = -\frac{p}{k}[\cos(kt) - 1]$$

ýa-da $\upsilon = \upsilon_0 + \dfrac{p}{km}[1 - \cos(kt)]$. υ-ni $\dfrac{dx}{dt}$ bilen çalşyrsak, $\dfrac{dx}{dt} = \upsilon_0 + \dfrac{p}{km}[1 - \cos(kt)]$ deňlemäni alarys. Bu ýerden $dx = \left[\upsilon_0 + \dfrac{p}{km} - \dfrac{p}{km}\cos(kt)\right]dt$

Soňky deňlemäni degişli çäklerde integrirläp, nokadyň hereket deňlemesini alarys:

$$\int_{x_0}^{x} ds = \int_0^t \left[\upsilon_0 + \frac{p}{km} - \frac{p}{km}\cos(k\tau)\right]d\tau,$$

$$x = x_0 + \left(\upsilon_0 + \frac{p}{km}\right)t - \frac{p}{k^2 m}\sin(kt).$$

Tapylan deňleme nokadyň koordinatasynyň wagta bagly üýtgeýşini görkezýär, ýagny bu deňleme nokadyň berlen başlangyç şertlerde $F = p\sin(kt)$ güýjüň täsiri astyndaky hereket deňlemesidir.

27.3. Material nokadyň koordinata bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.

Goý, nokada täsir edýän güýç koordinata bagly bolsun, ýagny $F = F(x)$. Onda (27.2) deňlik

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F(x) \tag{27.7}$$

görnüşe eýe bolar.

$\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ özgertmäni ulanalyň we $\dfrac{dx}{dt}$ ululygy υ bilen çalşyryp, (27.7) deňlemäni

$$m\frac{\upsilon d\upsilon}{dx} = F(x)$$

görnüşe getireliň. Bu ýerden $m\upsilon d\upsilon = F(x)dx$ deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni degişli çäklerde integrirläliň:

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} V\,dV = \int_{x_0}^{x} F(s)ds \tag{27.8}$$

υ_0 -nokadyň başlangyç tizligi, x_0 -nokadyň başlangyç koordinatasy.

$F(x)$-iň belli funksiýadygy sebäpli (27.8) deňlemäniň sag bölegindäki integraly hasaplap bolýar. Netijede käbir $\Phi(x)$ funksiýany alarys. Onda (27.8)-den:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \Phi(x)\ ,$$

bu ýerden

$$\upsilon = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2}{m}\Phi(x)} \tag{27.9}$$

(27.9) deňlik nokadyň tizliginiň onuň koordinatasyna bagly üýtgeýşini görkezýär. (27.9) deňlemede tizligi $\frac{dx}{dt}$ bilen çalşyralyň we üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl etmek usulyny ulanalyň:

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2}{m}\Phi(x)}} = dt$$

Bu deňlemäni degişli çäklerde integrirläp,

$$\pm\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{\sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2}{m}\Phi(s)}} = \int_0^t d\tau = t$$

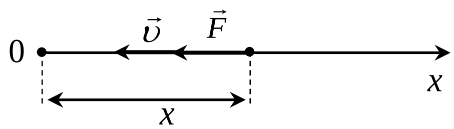
deňlemä geleris. Alnan deňleme *x* we *t* ululyklaryň arabaglanyşygyny görkezýär. Bu deňlemäniň çep bölegindäki integraly hasaplap, soňra *x*-i *t*-niň üsti bilen aňladyp, nokadyň $x = \psi(t)$ hereket deňlemesini taparys.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Goý, *m* massaly nokat göni çyzykda koordinatalar başlangyjyna tarap ugrukdyrylan, nokadyň koordinatasyna göni proporsional $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda hereket edýän bolsun, $F = cx$, $c > 0$. Başlangyç şertler:

$t = 0$ bolanda, $x = a,\ \upsilon = 0$. Nokadyň hereketiniň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi.



27.2-nji surat

Nokadyň hereketiniň differensial deňlemesi, $m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = -cx$

ýa-da $m\upsilon\, d\upsilon = -cx\, dx$. Bu deňlemäni degişli çäklerde integrirläp, tizligiň koordinata bagly üýtgeýşini kesgitläliň:

$$m\int_0^{\upsilon} V\, dV = -c\int_a^x s\, ds$$

bu ýerden

$$m\upsilon^2 = c\left(a^2 - x^2\right),$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{c}{m}\left(a^2-x^2\right)}\ .$$

Alnan deňleme nokadyň tizliginiň koordinata bagly üýtgeýşini görkezýär. Tizligi $\dfrac{dx}{dt}$ bilen çalşyralyň we üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl etmek usulyny ulanalyň:

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{c}{m}}dt$$

Bu deňligi degişli çäklerde integrirläliň:

$$\int_a^x\frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}}=\sqrt{\frac{c}{m}}\int_0^t d\tau=\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$$

Integrirlemegi ýerine ýetirip,

$$\arccos\frac{s}{a}\bigg|_a^x=\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$$

deňligi alarys. Bu ýerden $\arccos\dfrac{x}{a}-\arccos 1=\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t$, $\arccos\dfrac{x}{a}=\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t$ ýa-da,

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right).$$

Tapylan deňleme berlen başlangyç şertlerde nokadyň $F=c\cdot x$ güýjüň täsiri astyndaky hereket deňlemesidir.

27.4. Material nokadyň tizlige bagly güýjüň täsiri astyndaky hereketi.

Goý, nokada täsir edýän güýç tizlige bagly bolsun, ýagny $F=F(\upsilon)$. Onda (27.2) deňlik

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F(\upsilon)$$

görnüşe eýe bolar. Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip, deňlemäni degişli çäklerde integrirläliň:

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{dv}{F(v)}=\int_0^t d\tau=t \qquad (27.10)$$

Bu ýerde υ_0-nokadyň başlangyç tizligi.

(27.10) deňlemäniň çepindäki integraly hasaplanymyzdan soň ($F(v)$-belli funksiýa) alarys:

$$\varphi(\upsilon)=t \qquad (27.11)$$

Bu ýerde $\varphi(\upsilon)=m\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{dV}{F(V)}$-tizlige bagly käbir funksiýa.

(27.11) deňlemede tizligi wagtyň üsti bien aňladyp, tizligiň wagta bagly üýtgeýşi kesgitlenýär:

$$\upsilon=\psi(t) \qquad (27.12)$$

Ýokarda seredilişi ýaly, (27.12) deňleme üçin aýyl-saýyl usulyny ulanyp, taparys:

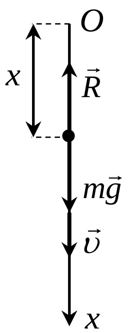
$$x = x_0 + \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \qquad (27.13)$$

Alnan deňleme nokadyň koordinatasynyň wagta bagly üýtgeýşini görkezýar, ýagny (27.13) deňleme nokadyň hereket deňlemesidir.

Bir mysala seredeliň.

Mysal (Garşylyk görkezýän meýdanda nokadyň hereketi). Massasy m bolan material nokat başlangyç tizliksiz $(\upsilon_0 = 0)$ O nokatdan agyrlyk güýjüniň täsiri astynda wertikal aşak gaçýar. Nokada tizlige göni proporsional, $\vec{R} = \mu \cdot \vec{\upsilon}$ ($\mu > 0$– howanyň dykyzlygyna bagly koeffisiýent) howanyň garşylyk güýji täsir edýän bolsun. Nokadyň hereket deňlemesini kesgitlemeli.

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny O nokatdan alyp, x okuny wertikal aşak ugrukdyralyň. Nokada täsir edýan güýçleri göz öňünde tutup, nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazalyň:



27.3-nji surat

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - \mu\upsilon.$$

Deňlemäniň iki bölegini hem m-e bölüp, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň:

$$\frac{d\upsilon}{g - \frac{\mu}{m}\upsilon} = dt$$

Bu ýerden degişli çäklerde integrirläp taparys:

$$-\frac{m}{\mu}\ln\left|g - \frac{\mu}{m}v\right|\Bigg|_o^{\upsilon} = t$$

ýa-da $\ln\dfrac{g - \frac{\mu}{m}\upsilon}{g} = -\dfrac{\mu}{m}t$. Alnan deňlemäni υ-tizlige görä çözüp taparys:

$$\upsilon = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right) \qquad (*)$$

Bu deňlik nokadyň tizliginiň wagta baglylykda üýtgeýşini görkezýär. $e^{-\frac{\mu}{m}t}$ – kemelýän funksiýa. (*) deňlikde $t \to \infty$ predele geçsek, nokadyň $\upsilon_{pred} = \dfrac{mg}{\mu}$ predel tizligini kesgitläris.

Nokadyň hereket deňlemesini tapmak üçin (*) deňlemede üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň we degişli çäklerde integrirläliň. Onda alarys:

$$dx = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)dt,$$

$$\int_0^x ds = \frac{mg}{\mu}\int_0^t\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}\tau}\right)d\tau.$$

Bu ýerden $x=\dfrac{mg}{\mu}t+\dfrac{m^2g}{\mu^2}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$. Alnan deňleme nokadyň tizlige göni proporsional garşylyk görkezýän meýdanda hereket deňlemesidir.

§28. Material nokadyň hereket mukdary. Material nokadyň hereket mukdarynyň momenti.

1. **Material nokadyň hereket mukdary. Güýjüň impulsy.**
2. **Material nokadyň hereket mukdary hakyndaky teorema.**
3. **Material nokadyň hereket mukdarynyň momenti hakyndaky teorema.**
4. **Nokadyň merkezi güýjüň täsiri astyndaky hereketi. Meýdanlar kanuny.**

28.1. Material nokadyň hereket mukdary. Güýjüň impulsy.

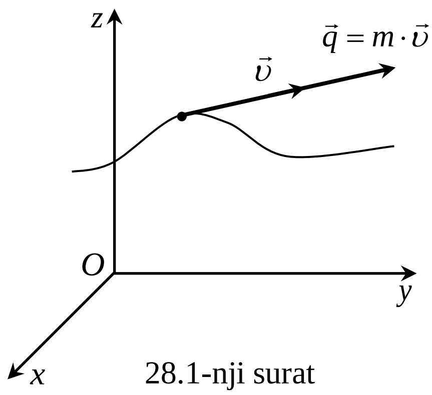
Hereket edýän *m* massaly material nokada seredeliň. Material nokadyň hereket mukdary düşunjesini girizeliň.

Kesgitleme. Material nokadyň massasynyň onuň tizligine köpeltmek hasylyna material nokadyň hereket mukdary diýilýär:

$$\vec{q}=m\cdot\vec{\upsilon}\ , \qquad (28.1)$$

bu ýerde $\vec{\upsilon}$ – nokadyň tizligi, $\vec{q}$ – material nokadyň hereket mukdary.

Massanyň položitel skalýar ululykdygy sebäpli, nokadyň hereket mukdary nokadyň tizligi bilen ugurdaş.



28.1-nji surat

Hereket mukdaryny dekart koordinatalar oklaryna proýektirläp, hereket mukdarynyň dekart oklary boýunça düzüjilerini kesgitläris:

$$q_x=m\cdot\upsilon_x\ ,\ q_y=m\cdot\upsilon_y\ ,\ q_z=m\cdot\upsilon_z\ , \qquad (28.2)$$

bu ýerde υ_x , υ_y , υ_z-nokadyň degişlilikde *x,y,z* oklar boýunça tizligi.

Hereket mukdarynyň ölçeg birligini kesgitläliň.

$$[hereket\ mukdary]=[massa\times tizlik]=kg\cdot\frac{m}{sek}=kg\cdot\frac{m}{sek^2}\cdot sek=N\cdot sek$$

Diýmek, hereket mukdarynyň ölçeg birligi $N\cdot sek\ (kG\cdot sek)$.

Güýjüň käbir çäkli wagtyň dowamyndaky impulsy düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Güýjüň tükeniksiz kiçi Δt wagtyň dowamyndaky elementar impulsy diýlip, güýjüň Δt wagta köpeltmek hasylyna deň bolan wektor ululyga aýdylýar:

$$\Delta\vec{S} = \vec{F}\cdot\Delta t$$

Güýjüň t çäkli wagt aralygyndaky impulsyny hasplamak üçin, bu wagt aralygyny n sany interwala böleliň. Bu interwallardaky güýjüň elementar impulslaryny jemläp, predele $(n\to\infty)$ geçeliň. Güýjüň t wagtyň dowamyndaky impulsyny $\vec{S}$ bilen belgiläp alarys:

$$\vec{S} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}\cdot\Delta t_i = \int_0^t \vec{F}\,dt \tag{28.3}$$

(28.3) deňlemäni dekart koordinata oklaryna proýektirläp, $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ güýjüň impulsynyň dekart oklary boýunça düzüjileri üçin

$$S_x = \int_0^t F_x\,d\tau\ ,\ S_y = \int_0^t F_y\,d\tau\ ,\ S_z = \int_0^t F_z\,d\tau \tag{28.4}$$

deňlikleri alarys.

28.2. Material nokadyň hereket mukdary hakyndaky teorema.

Dinamikanyň esasy kanunyna seredeliň.

$$m\cdot\vec{a} = \vec{F}\quad \text{ýa-da}\quad m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}\quad \text{ýa-da}\quad \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}$$

Bu ýerden, üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip alarys:

$$d(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}\,dt \tag{28.5}$$

ýagny **material nokadyň hereket mukdarynyň differensialy nokada täsir edýän güýjüň elementar impulsyna deň.**

(28.5) deňligi degişli çäklerde integrirläliň: $\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d(m\vec{V}) = \int_0^t \vec{F}\,d\tau$, bu ýerde $\vec{\upsilon}_0$ nokadyň başlangyç tizligi. Netijede,

$$m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{F}\,d\tau \tag{28.6}$$

deňligi alarys. Alnan (28.6) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

Nokadyň hereket mukdary hakyndaky teorema. Nokadyň hereket mukdarynyň käbir wagtyň dowamynda üýtgemegi nokada täsir edýän güýjüň şol wagtyň dowamyndaky impulsyna deň.

(28.6) deňlik dekart oklaryna proýeksiýalarda

$$\begin{cases} m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = \int_0^t F_x\,d\tau \\ m\upsilon_y - m\upsilon_{0y} = \int_0^t F_y\,d\tau \\ m\upsilon_z - m\upsilon_{0z} = \int_0^t F_z\,d\tau \end{cases} \tag{28.7}$$

görnüşe eýe bolar. Ýagny material nokadyň haýsy hem bolsa bir ok boýunça hereket mukdarynyň käbir t wagtyň dowamynda üýtgemegi nokada täsir edýän güýjüň bu ok boýunça düzüjisiniň t wagtyň dowamyndaky impulsyna deň.

Eger täsir edýän $\vec{F}$ güýjüň F_x, F_y, F_z düzüjileri wagta bagly funksiýalar hökmünde belli bolsa, onda (28.7) deňlemelerden islendik t wagt üçin nokadyň tizligini kesgitläp bolar.

Ýokarda getirilen teoremadan gelip çykýan käbir netijeler:

1) Goý, $F_x = 0$ bolsun. Onda, $m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = const$, ýagny *täsir edýän güýjüň käbir ok boýunça düzüjisi hereketiň dowamynda nola deň bolsa, onda nokadyň tizliginiň bu ok boýunça düzüjisi üýtgemeýär.*

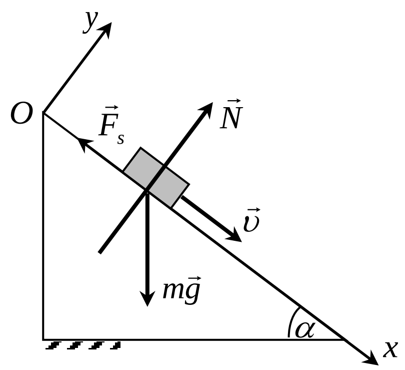
2) Goý, $F_x = const$ bolsun. Onda $\int_0^t F_x \, d\tau = F_x \cdot t$, $m\upsilon_x - m\upsilon_{0x} = F_x \cdot t$.

3) Goý, $\vec{F} = const$ bolsun. Onda $\int_0^t \vec{F} \, d\tau = \vec{F} \cdot t$, $m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0 = \vec{F} \cdot t$

Nokadyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremanyň ulanylyşyna degişli mysala seredeliň.

Mysal. Jisim ýapgytlyk burçy $\alpha = 30^0$ bolan ýylmanak däl tekizlik boýunça başlangyç tizliksiz $(\upsilon_0 = 0)$ aşak hereket edýär. Jisim bilen tekizligiň arasyndaky sürtülme koeffisiýenti $f = 0{,}2$. Jisim näçe wagtda $l = 39{,}2\,\text{m}$ ýol geçer.

Çözülişi. X okuny ýapgyt boýunça aşak ugrukdyralyň.



28.2-nji surat

$\vec{F}_s$ – sürtülme güýji, $\vec{N}$ – daýanç tekizligiň reaksiýasy. Jisim Ox oky boýunça hereket edýär, diýmek, $y = 0$. Onda $N - mg\cos\alpha = 0$ ýa-da $N = mg\cos\alpha$. Bu ýerden $F_s = f \cdot N$ deňligi ulanyp, $F_s = f \cdot mg\cos\alpha$ bolýandygyny alarys.

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany Ox oky boýunça ulanalyň we alnan differensial deňlemäni çözeliň.

$$m\upsilon = (mg\sin\alpha - F_s) \cdot t$$

$$m\frac{dx}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t$$

$$dx = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t\,dt$$

$$\int_0^x ds = \int_0^t g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot \tau\,d\tau$$

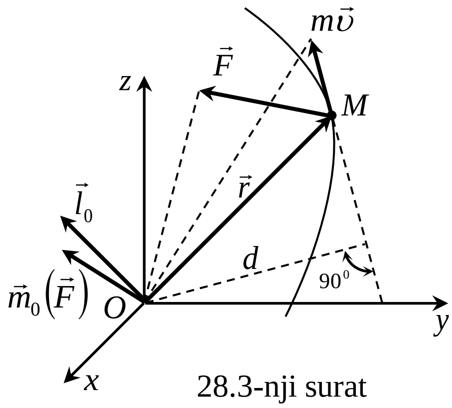
$$x = g\frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot t^2}{2}$$

Alnan deňleme jisimiň x oky boýunça hereket deňlemesidir. Bu deňlemede $x = l$ goýup, t wagty taparys:

$$l = g\frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} \approx 5sek.$$

28.3. Material nokadyň hereket mukdarynyň momenti hakyndaky teorema.

Goý, *m* massaly *M* nokat $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda hereket edýän bolsun. *O*– giňişlikde erkin saýlanyp alnan nokat.



28.3-nji surat

$\vec{r} - M$ nokada *O* nokatdan geçirilen radius-wektor;

$\vec{m}_0(\vec{F}) - \vec{F}$ güýjüň *O* nokada görä momenti;

$\vec{l}_0 - M$ nokadyň hereket mukdarynyň *O* nokada görä momenti, $\vec{l}_0 = \vec{m}_0(m\vec{\upsilon})$;

d – nokadyň hereket mukdarynyň *O* nokada görä egni.

Statikadan belli bolşy ýaly, $\vec{m}_0(\vec{F})$ wektoryň *Ox*, *Oy*, *Oz* oklara bolan proýeksiýalary, m_{Ox}, m_{Oy}, m_{Oz} ululyklar degişlilikde $\vec{F}$ güýjüň bu oklara görä momentlerine deň. Şeýle-de, $\vec{m}_0(\vec{F})$, $\vec{l}_0$ wektorlary wektorlaýyn köpeltmek hasyl hökmünde aňladyp bolýar, ýagny

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F}\ , \qquad (28.8)$$

$$\vec{l}_0 = \vec{r}\times m\vec{\upsilon}\ . \qquad (28.9)$$

$\vec{l}_0$ – wektoryň hem *Ox*, *Oy*, *Oz* oklara bolan proýeksiýalary degişlilikde $m\vec{\upsilon}$ wektoryň bu oklara görä momentlerine deň:

$$l_{Ox} = m_x(m\vec{\upsilon}),\ l_{Oy} = m_y(m\vec{\upsilon}),\ l_{Oz} = m_z(m\vec{\upsilon})$$

(28.9) deňligi differensirläliň:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{\upsilon} + \vec{r}\times\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon} = \vec{0}\right] = \vec{0} + \vec{r}\times m\vec{a} =$$
$$= \left[m\vec{a} = \vec{F}\right] = \vec{r}\times\vec{F}$$

Diýmek, (28.8) deňligiň esasynda

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F}) \qquad (28.10)$$

deňligi alarys. Alnan (28.10) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň:

Nokadyň hereket mukdarynyň momenti hakyndaky teorema. Material nokadyň hereket mukdarynyň gozganmaýan merkeze görä momentiniň wagt boýunça önümi nokada täsir edýän güýjüň şol merkeze görä momentine deň.

(28.10) deňligi Ox okuna proýektirläliň: $\left[\dfrac{d\vec{l}_0}{dt}\right]_x = \left[\vec{m}_0\left(\vec{F}\right)\right]_x$

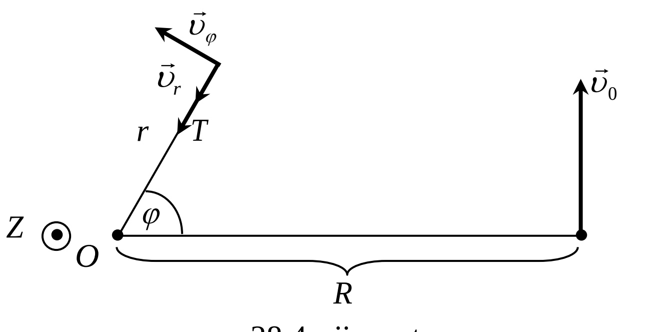
"Matematiki derňew" kursundan belli bolşy ýaly, wektoryň önüminiň käbir oka proýeksiýasy, bu wektoryň şu oka proýeksiýasynyň önümine deň. Onda ýokardaky deňlikden $\dfrac{d}{dt} l_{Ox} = m_x\left(\vec{F}\right)$ ýa-da, $\dfrac{d}{dt} m_x(m\vec{\upsilon}) = m_x\left(\vec{F}\right)$ deňligi alarys. Nokadyň hereket mukdarynyň x oka görä momentini l_x bilen belgiläp, soňky deňlikden alarys:

$$\frac{d}{dt} l_x = m_x\left(\vec{F}\right) \tag{28.11}$$

Alnan deňlik hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremanyň koordinatalaýyn görnüşini görkezýär: **Material nokadyň hereket mukdarynyň käbir oka görä momentiniň wagt boýunça önümi nokada täsir edýän güýjüň bu oka görä momentine deň.** Elbetde, (28.11) deňlik Oy, Oz oklar boýunça hem ýerine ýetmeli, $\dfrac{d}{dt} l_y = m_y\left(\vec{F}\right)$, $\dfrac{d}{dt} l_z = m_z\left(\vec{F}\right)$.

Subut edilen teoremadan gelip çykýan netije:

Goý, nokadyň hereketiniň dowamynda nokada täsir edýän güýjüň z oka görä momenti nola deň bolsun, ýagny $m_z\left(\vec{F}\right) = 0$. Onda, $\dfrac{d}{dt} l_z = 0$. Bu ýerden $l_z = const$.
Diýmek, *nokada täsir edýän güýjüň käbir oka görä momenti nokadyň hereketiniň dowamynda nola deň bolsa, onda nokadyň hereket mukdarynyň bu oka görä momenti üýtgemeýär*.
Bir mysala seredeliň.
Mysal. Süýnmeýän ýüpe birikdirilen massasy m bolan şarjagaz ýylmanak tekizlikde hereket edýär. Ýüpüň ikinji ujuny tekizlikde edilen deşikden geçirip, $\upsilon = const$ tizlik bilen çekýärler. Başlangyç pursatda şarjagaz bilen deşigiň arasy R, şarjagazyň başlangyç tizliginiň ýüpe perpendikulýar ugra proýeksiýasy υ_0. Şarjagazyň hereket deňlemesini we ýüpüň dartyş güýjüni kesgitlemeli.
Çözülişi.



28.4-nji surat

O–tekizlikde edilen deşik; Z–O nokatdan geçýän, nokadyň hereket edýän tekizligine perpendikulýar ok; r – polýar radius; φ– polýar burç.
Nokadyň hereketini polýar koordinatalarda öwreneliň. Mälim bolşy ýaly, $\upsilon_r = \dot{r}$.
Onda $\dot{r} = -\upsilon$; ýa-da, $\dfrac{dr}{dt} = -\upsilon$. Bu ýerden

$$dr = -\upsilon dt \quad , \quad \int_R^r ds = -\upsilon \int_0^t d\tau \quad , \quad r - R = -\upsilon \cdot t$$

Diýmek, $r = R - \upsilon \cdot t$.

Nokat ýüpüň $\vec{T}$ dartyş güýjüniň täsiri astynda hereket edýär. Üns bersek, hereketiň dowamynda $m_z(\vec{T}) = 0$. Diýmek, şarjagazyň hereket mukdarynyň z oka görä momenti üýtgemeýär, $l_z = const$. $t = 0$ pursatda, $l_z = m\upsilon_0 \cdot R$; Şu wagt pursatynda $l_z = m\upsilon_\varphi \cdot r = mr\dot{\varphi} \cdot r = m\dot{\varphi} \cdot r^2$. Onda $m\dot{\varphi} \cdot r^2 = m\upsilon_0 \cdot R$. Bu ýerden:

$$\dot{\varphi} = \frac{\upsilon_0 \cdot R}{r^2} = \frac{\upsilon_0 \cdot R}{(R - \upsilon \cdot t)^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon_0 \cdot R}{(R - \upsilon \cdot t)^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{\upsilon_0 \cdot R}{(R - \upsilon \cdot t)^2} dt$$

Degişli çäklerde integrirläliň:

$$\int_0^\varphi d\psi = \upsilon_0 \cdot R \int_0^t \frac{d\tau}{(R - \upsilon \cdot \tau)^2} \Rightarrow \varphi = \frac{\upsilon_0 \cdot t}{R - \upsilon \cdot t}$$

Şeýlelik, bilen şarjagazyň hereket deňlemesini:

$$\begin{cases} r = R - \upsilon t \\ \varphi = \dfrac{\upsilon_0 \cdot t}{R - \upsilon t} \end{cases}$$

görnüşde alarys.

Şarjagazyň tizlenmesiniň $\vec{a}_r$ radial düzüjisi ýüp boýunça ugrukdyrylan, ululygy

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = \frac{\upsilon_0^2 \cdot R^2}{(R - \upsilon \cdot t)^3} \ .$$

Dinamikanyň 2-nji kanunyny radial ugur boýunça ulanyp, ýüpüň dartyş güýjüni kesgitläris:

$$T = ma_r = \frac{m\upsilon_0^2 \cdot R^2}{(R - \upsilon t)^3}$$

28.4. Nokadyň merkezi güýjüň täsiri astyndaky hereketi. Meýdanlar kanuny.

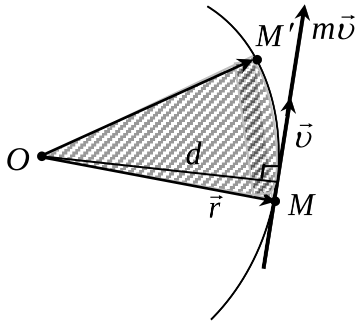
Merkezi güýjüň, ýagny täsir çyzygy hemişe gozganmaýan nokatdan geçýän güýjüň täsirinde material nokadyň hereketiniň aýratynlygyny öwreneliň.

Bu görnüşli güýçlere asman mehanikasynyň meselelerinde gabat gelip bolar (Günüň dartyş güýjüniň täsirinde planetalaryň hereketi; emeli hemranyň Ýeriň dartyşynyň täsirinde hereketi). Elektronlaryň hereketi öwrenilende hem şeýle güýçler ýüze çykýar.

Merkezi $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda hereket edýän M nokada seredeliň. Goý, $\vec{F}$ güýjüň täsir çyzygy gozganmaýan O nokatdan geçýän bolsun. Onda, $\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{0}$.

Diýmek, (28.10) formuladan $\dfrac{d\vec{l}_0}{dt} = 0$ ýa-da $\vec{l}_0 = const$

Wektorlaýyn köpeltmek hasylynyň häsiýeti boýunça $\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$ wektor $\vec{r}$ we $m\vec{\upsilon}$ wektorlary saklaýan tekizlige perpendikulýar. Onda $\vec{l}_0$ wektoryň üýtgemeýändigi sebäpli $\vec{r}$ we $\vec{\upsilon}$ wektorlar nokadyň hereketiniň dowamynda bir tekizlikde ýatýarlar.



28.5-nji surat

d – $m\vec{\upsilon}$ wektoryň O nokada görä egni. Material nokadyň hereket mukdarynyň O nokada görä momentiniň ululygy $l_0 = m\upsilon \cdot d = const$. Nokadyň massasy hemişelik ululyk. Onda $\upsilon \cdot d = const$, ýagny nokada merkezi güýç täsir edende $\upsilon \cdot d$ ululyk üýtgemeýär. Bu alnan netijä şeýle geometrik many berip bolar. Goý, dt ujypsyz wagtyň dowamynda material nokat M nokatdan M' nokada ornuny üýtgeden bolsun. MM' duganyň uzynlygy $\upsilon \cdot dt$ ululyga deň. dt wagtyň dowamynda OM radius wektoryň geometrik orny käbir sektory (28.5-nji suratda ştrihlenen) çyzar. dt wagtyň ujypsyzlygy sebäpli, MOM' sektory üçburçluk hökmünde kabul edip bolýar. Bu sektoryň meýdany

$$ds = \frac{1}{2} MM' \cdot d = \frac{1}{2} \upsilon \cdot d\, dt$$

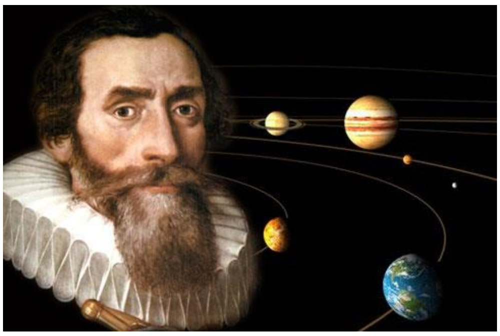
Bu ýerden alarys:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \upsilon \cdot d = const \qquad (28.12)$$

$\frac{ds}{dt}$ ululyk OM radius wektoryň çyzýan meýdanynyň wagt boýunça üýtgeýşini kesgitleýän ululyk bolup, material nokadyň **sektorlaýyn tizligi** diýlip atlandyrylýar. Ýokarda aýdylanlardan şeýle netije gelip çykýar:

Merkezi güýjüň täsiri astynda hereket edýan material nokat tekiz egriçyzyk boýunça hemişelik sektorlaýyn tizlik bilen hereket edýar; bu nokadyň radius-wektory deň wagt aralyklarda deň meýdanly sektorlary çyzýar.

Bu kanun I.Kepler (1571-1630) tarapyndan açylýar we *meýdanlar kanuny* diýlip atlandyrylýar.



Iogann Kepler (1571-1630)

Beýik nemes astronomy we matematigi. Onuň astronomiýada, matematikada, fizikada bitiren işleri sanardan köp. Häzirkizaman refraktorlarynda ulanylýan optiki sistemany oýlap tapýar. Matematikanyň differensial, integral we wariasion hasaplamalary ýaly bölümlerinde ençeme işler oňa degişlidir.

§29. Mehaniki iş. Kuwwat. Material nokadyň kinetik energiýasy.

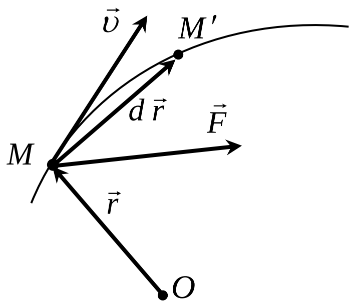
1. **Güýjüň mehaniki işi.**
2. **Deňtäsiredijiniň mehaniki işi hakynda teorema.**
3. **Maýyşgaklyk güýjüniň işi.**
4. **Agyrlyk güýjüniň işi.**
5. **Güýjüň kuwwaty.**
6. **Aýlanýan jisime goýlan güýjüň işi we kuwwaty.**
7. **Material nokadyň kinetik energiýasy. Material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.**

29.1. Güýjüň mehaniki işi.

Mehanikanyň dürli soraglarynda skalýar ululyk bolan *güýjüň mehaniki işi* wajyp orun tutýar.

Bu ululyk güýjün goýlan nokadynyň hereketine bolan täsiriniň effektiwligini häsiýetlendirýär. Güýjüň mehaniki işiniň kesgitlemesini getirmezden öň güýjüň elementar işi düşünjesini girizeliň.

Goý, M nokat $\vec{F}$ güýjüň täsirinde hereket edýän bolsun. Nokadyň tükeniksiz kiçi $d\vec{r}$ elementar orunüýtgemesini alalyň.



29.1-nji surat

Kesgitleme. Nokada täsir edýän güýjüň nokadyň elementar orunüýtgetmesine skalýar köpeltmek hasylyna **güýjüň elementar mehaniki işi** diýilýär.

Elementar mehaniki işi dA bilen belgiläp alarys:

$$dA = \left(\vec{F},\, d\vec{r}\right) \tag{29.1}$$

Bu ýerde $d\vec{r}$–nokadyň elementar orunüýtgemesiniň wektory. Başgaça aýdylanda, $d\vec{r}$–gozganmaýan O nokatdan geçirilen $\vec{r}$ radius wektoryň differensialy.

Skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden

$$dA = \vec{F}\cdot\left|d\vec{r}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{F},d\vec{r}}\right) \tag{29.2}$$

deňligi alarys. MM' duganyň uzynlygyny ds bilen belgiläliň. “Matematiki derňew” kursundan belli bolşy ýaly, $\lim\limits_{|d\vec{r}|\to 0}\dfrac{ds}{|d\vec{r}|}=1$, ýagny $ds \approx |d\vec{r}|$. $|d\vec{r}|$ ululyk nola ymtylanda $d\vec{r}$ wektoryň ugry nokadyň tizliginiň ugruna tükeniksiz ýakynlaşýar. Sebäbi M' nokat M nokada tükeniksiz ýakynlaşanda MM' göni çyzyk M nokatda geçirilen galtaşma göni çyzygyna öwrülýär.

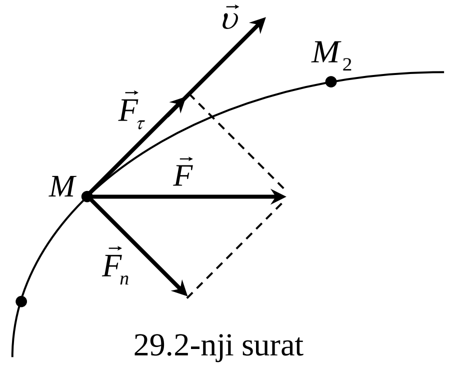
Ýokarda aýdylanlary göz öňünde tutup, (29.2) deňligi

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos\left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{\upsilon}\right) \tag{29.3}$$

görnüşde ýazalyň. Eger täsir edýän güýç bilen tizligiň arasyndaky burç ýiti bolsa, onda, $dA > 0$. Hususy ýagdaýda, $\left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{\upsilon}\right) = 0$ bolsa, onda $dA = F \cdot ds$ bolar. Eger, täsir edýän güýç bilen tizligiň arasyndaky burç kütek bolsa, onda, $dA < 0$. Hususy ýagdaýda, $\left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{\upsilon}\right) = 180^0$ bolsa, onda, $dA = -F \cdot ds$ bolar. Eger $\left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{\upsilon}\right) = 90^0$ bolsa,onda $dA = 0$ bolar.

Nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýji iki düzüjä böleliň:

$\vec{F}_\tau$ – traýektoriýa galtaşýan boýunça düzüjisi; $\vec{F}_n$ –baş normal boýunça düzüjisi.



29.2-nji surat

(29.3) formuladan görnüşi ýaly, işi güýjüň galtaşýan boýunça düzüjisi $\vec{F}_\tau$ güýç ýerine ýetirýär. Bu düzüjiniň ululygy $F \cdot \cos\left(\vec{F} \,\hat{,}\, \vec{\upsilon}\right)$ ululyga deň. Onda (29.3) deňlikden

$$dA = F_\tau \cdot ds \tag{29.4}$$

formulany alyp bileris ýa-da $ds = \upsilon \cdot dt$ deňlikden peýdalanyp taparys:

$$dA = F_\tau \cdot \upsilon\, dt \tag{29.5}$$

Skalýar köpeltmek hasylyny ulanyp, (29.3) deňligi

$$dA = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right) dt \tag{29.6}$$

görnüşde ýazyp bileris.

$\vec{F}$ güýjüň we $\vec{\upsilon}$ tizligiň dekart koordinatalary boýunça düzüjilerini göz öňünde tutup, $\left[\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right),\ \vec{\upsilon} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\right]$ (29.6)-dan alarys:

$$dA = \left(F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt} + F_z \cdot \frac{dz}{dt}\right) dt = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

Elementar iş üçin ýene bir

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \tag{29.7}$$

formulany aldyk

Bu ýerde dx, dy, dz–güýjüň goýlan nokadynyň elementar orunüýtgetmesiniň koordinata oklary boýunça düzüjileri.

Güýjüň M_1M_2 çäkli aralykdaky (29.2-nji surat) mehaniki işini hasaplamak üçin M_1M_2 egrini elementar ds_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ böleklere bölmeli. Böleklerdäki elementar işleri jemläp, $n \to \infty$ predele geçmeli. Netijede alarys:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot \cos\left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right) ds \ , \qquad (29.8)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz \ . \qquad (29.9)$$

Nokadyň çäkli aralykdaky örunüýtgemesinde nokada täsir edýän güýjüň mehaniki işi elementar işden bu aralykda alnan integrala (egriçyzykly integral) deň.

Güýjüň ölçeg birligi:

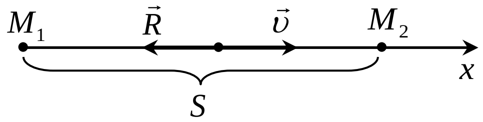
[*A*]=[*güýç*]×[*uzynlyk*]=*N·m*

Tehniki ölçeg birlikler sistemasynda $kG \cdot m$.
SI ölçeg birlikler sistemasynda işiň ölçeg birligi-džoul (dž):

1dž=1N·m

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Nokat göni çyzyk boýunça $x = at^2$, $a = const$ deňlemä laýyklykda hereket edýär. Gurşawyň $\vec{R}$ garşylygy nokadyň tizligine ters ugrukdyrylan, ululygy boýunça $\mu\upsilon$(μ–garşylyk koeffisiýenti) sana deň. Nokat dynçlyk ýagdaýdan herekete girip, *S* aralyk geçende garşylyk güýjüniň işini kesgitlemeli.



29.3-nji surat

Çözülişi. Işi tapmak üçin (29.9) formuladan peýdalanalyň:

$$R_x = -\mu\upsilon \ , \ R_y = 0 \ , \ R_z = 0 \ ,$$

$$x = at^2 \Rightarrow \quad dx = 2at\,dt.$$

Nokadyň tizligi, $\upsilon = \dot{x} = 2at$. Bu ululyklary (29.9) formulada ýerine goýalyň

$$A = -\int_{M_1}^{M_2} \mu \cdot 2at \cdot 2at\,dt = -4a^2\mu \int_{M_1}^{M_2} t^2\,dt$$

Integralyň aşagyndaky aňlatma wagta bagly funksiýa. Wagtyň M_1, M_2 nokatlara degişli bahalaryny tapalyň:

$$M_1: \ x = 0 \Rightarrow at^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,$$

$$M_2: \ x = s \Rightarrow at^2 = s \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{s}{a}}.$$

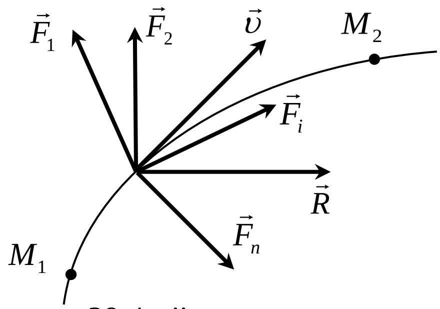
Şeýlelik bilen, garşylyk güýjüniň M_1M_2 aralykdaky işi

$$A = -4a^2\mu \int_0^{\sqrt{\frac{s}{a}}} t^2\,dt = -4a^2\mu \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\sqrt{\frac{s}{a}}} = -\frac{4}{3}a^2\mu\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

Garşylyk güýji herekete ters ugrukdyrylan. Şol sebäpli bu güýjüň işi otrisatel.

29.2 Deňtäsiredijiniň mehaniki işi hakynda teorema.

Goý, material nokada $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ güýçler täsir edýän bolsun. Bu güýçleriň deňtäsiredijisini $\vec{R}$ bilen belgiläliň. Nokadyň M_1M_2 aralykdaky hereketine seredeliň.



29.4-nji surat

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ deňligi nokadyň tizliginiň ugruna proýektirläp,

$$R\cos\left(\vec{R}\hat{,}\vec{\upsilon}\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\left(\vec{F}_i\hat{,}\vec{\upsilon}\right) \tag{29.10}$$

deňligi alarys. (29.10) deňligi M_1M_2 aralykda integrirlesek

$$\int_{M_1}^{M_2} R\cos\left(\vec{R}\hat{,}\vec{\upsilon}\right) ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{M_1}^{M_2} F_i \cos\left(\vec{F}_i\hat{,}\vec{\upsilon}\right) ds$$

deňlige geleris. Bu deňlikden (29.8) formulanyň esasynda aşakdaky formulany alarys:

$$A_R = \sum_{i=1}^{n} A_{F_i} \tag{29.11}$$

Bu ýerde $A_R -$ $\vec{R}$ güýjüň işi; $A_{F_i} - \vec{F}_i$ güýjüň işi. Alnan (29.11) formulany teorema hökmünde tassyklalyň.

Teorema (deňtäsiredijiniň işi hakynda). Birnäçe güýçleriň deňtäsiredijisiniň käbir aralykdaky mehaniki işi, bu güýçleriň şol aralykdaky mehaniki işleriniň algebraik jemine deň.

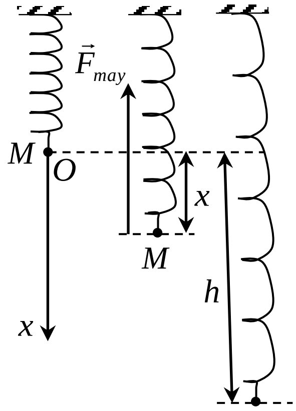
29.3. Maýyşgaklyk güýjüniň işi.

Bellik: Beýanymyzyň dowamynda güýjüň mehaniki işi adalgasynyň ornuna “güýjüň işi” adalgasy ulanyljakdyr.

Gukuň kanuny boýunça süýndirilýän pružiniň maýyşgaklyk güýji süýnmä göni proporsional. Süýnmäni *x* bilen belgilesek, onda maýyşgaklyk güýji $F = c \cdot |x|$ ululyga deň.

Bu ýerde, c–berlen pružiniň **gatylyk koeffisiýenti** diýlip atlandyrylýan proporsionallyk koeffisiýenti (bu ululyk pružiniň materialyna bagly).

Goý, pružin *h* uzynlyga süýndirilen bolsun. Koordinatalar başlangyjyny süýnmedik ýagdaýynda pružiniň ujunda (*M* nokat) alyp, *x* okuny *M* nokadyň hereket ugry boýunça ugrukdyralyň.



29.5-nji surat

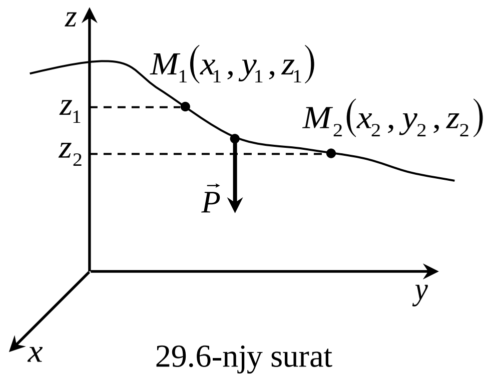
$\vec{F}-$ güýjüň düzüjileri, $F_x = -c \cdot x,\ F_y = 0,\ F_z = 0$. Onda (29.9) formulany ulanyp alarys:

$$A = \int_0^h (-c \cdot x)dx = -c\frac{x^2}{2}\bigg|_0^h = -\frac{ch^2}{2} \qquad (29.12)$$

Bellik. (29.12) formula dine bir pružin üçin däl-de , umuman maýyşgaklyk güýji bilen deformasiýanyň arasynda çyzykly baglanyşyk bolanda hem dogrudyr.

29.4. Agyrlyk güýjüniň işi.

Goý, m massaly material nokat agyrlyk meýdanynda hereket edýän bolsun. Nokada täsir edýän agyrlyk güýjüniň M_1M_2 aralykdaky işini hasaplalyň. M_1, M_2 nokatlaryň koordinatalary degişlilikde (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) bolsun. $\vec{P}$–agyrlyk güýji.



29.6-njy surat

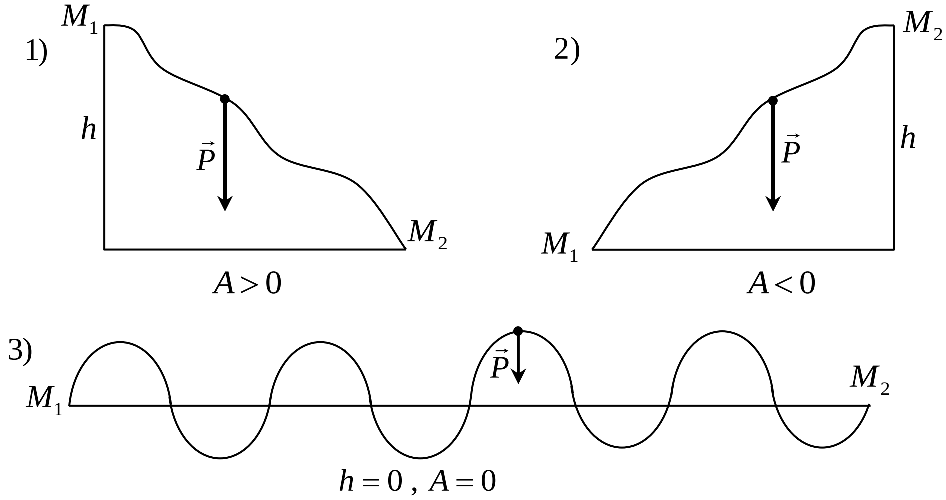
Agyrlyk güýjüniň düzüjileri $P_x = 0, P_y = 0, P_z = -mg$. (29.9) formulada bu düzüjileri ýerine goýalyň:

$$\int_{M_1}^{M_2} P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz = \int_{z_1}^{z_2} (-mg)dz = -mgz\Big|_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2) \qquad (29.13)$$

Nokadyň wertikal boýunça orunüýtgemesini, ýagny başlangyç z_1 we soňky z_2 applikatalarynyň tapawudyny h bilen belgiläp, (29.13) deňlikden alarys:

$$A = mgh \qquad (29.14)$$

Diýmek, *agyrlyk güýjüniň işi traýektoriýanyň görnüşine bagly bolman, agyrlyk güýjüniň nokadyň wertikal boýunça orunüýtgemesine köpeltmek hasylyna deň.*
Eger $h = z_1 - z_2 > 0$ bolsa, onda $A > 0$; eger $h = z_1 - z_2 < 0$ bolsa, onda $A < 0$; eger $h = z_1 - z_2 = 0$ bolsa, onda $A = 0$. Bu üç ýagdaýy shemalaýyn görkezeliň:



29.7-nji surat

29.5. Güýjüň kuwwaty.

Güýjüň iş edişiniň tizligini häsiýetlendirýän kuwwat düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Güýjüň işiniň wagt birliginde üýtgemegini häsiýetlendirýän ölçege **güýjüň kuwwaty** diýilýär:

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (29.15)$$

bu ýerde N–güýjüň kuwwaty; dA–güýjüň dt wagtyň dowamyndaky elementar işi. Elementar işiň ululygyny (29.15) formulada ýerine goýup,

$$N = \frac{F\cos\left(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right)ds}{dt} = F\cos\left(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right)\cdot\upsilon,$$

$$N = F_\tau \cdot \upsilon \qquad (29.16)$$

netijäni alarys

Berlen pursatda güýjüň kuwwaty, onuň galtaşma düzüjisiniň goýlan nokadynyň tizligine köpeltmek hasylyna deň.

Kuwwatyň ölçeg birligi–**watt (Wt):**

$$1Wt = 1\frac{N \cdot m}{sek}$$

Bu ölçeg birliginiň kiçidigi sebäpli tehniki soraglarda kilowatt (kWt), megawatt (mWt), at güýji (a.g.) ýaly ululyklar ulanylýar.

$$1kWt = 10^3\,Wt\ ,$$

$$1mWt = 10^6\,Wt\ ,$$

$$1a.g. = 75\frac{kG \cdot m}{sek} = 736\,Wt\ .$$

Bellik. Kuwwatyň ölçeg birligi hökmünde ulanylýan “at güýji” adalgasy taryhy galan şowsuz adalga. Kuwwatyň ölçeg birligi güýç ölçeg birligi däl.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Bir silindrli bug maşynynyň porşenine edilýan ortaça basyş $p = 4\dfrac{kG}{sm^2}$. Porşeniň ortaça tizligi $\upsilon = 2\dfrac{m}{sek}$. Maşynyň peýdaly kuwwaty $N_p = 67{,}5\,a.g.$, maşynyň peýdaly täsir koeffisiýenti $h = 0{,}9$. Porşeniň diametrini kesgitlemeli.

Çözülişi. Maşynyň ulanýan kuwwaty

$$N = \frac{N_p}{h} = \frac{67{,}5\,a.g.}{0{,}9} = 75\,a.g.$$

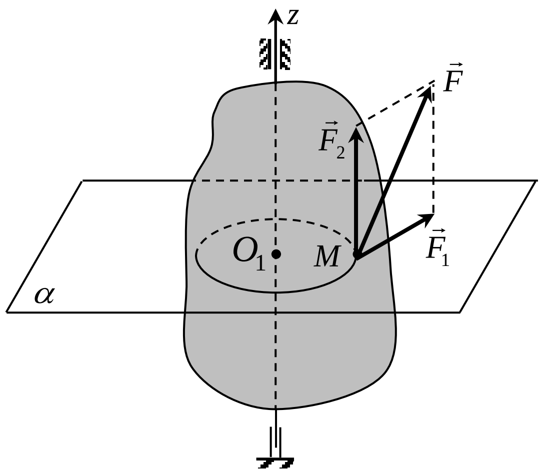
Bug basyşy porşeniň hereketiniň ugry boýunça täsir edýär. Onda, (29.16) formuladan alarys: $N = P \cdot \upsilon$. Bu ýerde P – buguň itekleýji güýji.

Diýmek, $P = \dfrac{N}{\upsilon} = \dfrac{75\,a.g.}{2\dfrac{m}{sek}} = \dfrac{75 \cdot 75\,kG\dfrac{m}{sek}}{2\dfrac{m}{sek}} = 2812{,}5\,kG$. Başga tarapdan, $P = p \cdot s$ (s-porşeniň üstüniň meýdany). Bu ýerden $s = \dfrac{P}{p}$ ýa-da

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{p}, \quad d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot p}} \approx 30\,sm$$

29.6. Aýlanýan jisime goýlan güýjüň işi we kuwwaty.

Goý, gozganmaýan z okuň daşyndan aýlanýan jisimiň M nokadyna $\vec{F}$ güýç täsir edýän bolsun.



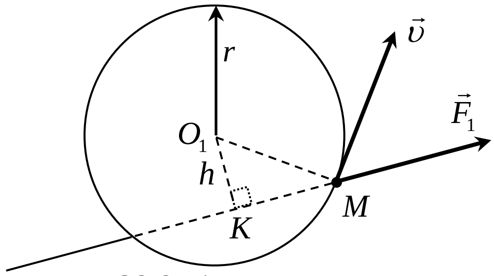
29.8-nji surat

M nokat aýlanma okuna perpendikulýar α tekizlikde ýatýan, merkezi (O_1) z okda bolan töwerek boýunça hereket edýär. $\vec{F}$ güýji iki düzüjä böleliň: $\vec{F}_1 - \alpha$ tekizlikde ýatýar, $\vec{F}_2 - z$ oka parallel.

Deňtäsiredijiniň işi hakyndaky teorema boýunça $\vec{F}$ güýjüň elementar işi $\vec{F}_1\,\vec{F}_2$ güýçleriň elementar işleriniň jemine deň. Emma $\vec{F}_2$ güýç nokadyň traýektoriýasyna perpendikulýar. Diýmek, bu güýjüň işi nola deň. Şeýlelik bilen, $\vec{F}$ güýjüň elementar işi:

$$dA = F_1 \cdot \cos\left(\vec{F_1}\,\widehat{,}\,\vec{\upsilon}\right) \cdot ds\ ,$$

ds-nokadyň orunüýtgemesi. M nokadyň hereket edýän töwereginiň radiusyny r bilen belgiläliň.



29.9-njy surat

$h - O_1$ nokatdan $\vec{F_1}$ güýjüň täsir çyzygyna inderilen perpendikulýar O_1K kesimiň uzynlygy.

Jisimiň φ aýlanma burçuna $d\varphi$ artdyrma bereliň. Onda nokadyň orunüýtgetmesi $ds = r \cdot d\varphi$ we $\vec{F}$ güýjüň elementar işi

$$dA = F_1 \cdot \cos\left(\vec{F_1}\,\widehat{,}\,\vec{\upsilon}\right) \cdot r\, d\varphi$$

bolar. $\left(\vec{F_1}\,\widehat{,}\,\vec{\upsilon}\right) = K\widehat{O_1}M$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $\vec{F}$ güýjüň elementar işini $dA = F_1 \cdot h\, d\varphi$ görnüşde ýazalyň. Onda $F_1 \cdot h$ ululygyň $\vec{F}$ güýjüň z oka görä momentine deňdigini belläp alarys:

$$dA = m_z\left(\vec{F}\right) \cdot d\varphi \tag{29.17}$$

$m_z\left(\vec{F}\right)$ ululygy $\vec{F}$ güýjüň *aýlandyryjy momenti* diýip atlandyralyň we m_{ayl} bilen belgiläliň. Onda (29.17) formula

$$dA = m_{ayl} \cdot d\varphi \tag{29.18}$$

görnüşe geler.

Jisim käbir φ burça aýlananda $\vec{F}$ güýjüň işi (elementar işleriň jemi)

$$A = \int_0^{\varphi} m_{ayl}\, d\psi \tag{29.19}$$

formula bilen kesgitlenýär. Eger $m_{ayl} = const$ bolsa, onda:

$$A = m_{ayl} \cdot \varphi\ . \tag{29.20}$$

Aýlanýan jisime täsir edýän güýjüň kuwwatyny kesgitläliň. (29.15) formulada (29.18) aňlatmany goýup, $N = \frac{dA}{dt} = \frac{m_{ayl} \cdot d\varphi}{dt}$ deňligi alarys. Emma $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$; ω-jisimiň burç tizligi. Diýmek,

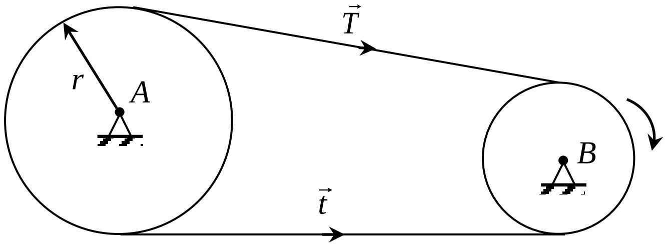
$$N = m_{ayl} \cdot \omega \tag{29.21}$$

Aýlanýan jisime täsir edýän güýjüň kuwwaty güýjüň aýlandyryjy momentiniň jisimiň burç tizligine köpeltmek hasylyna deň.

Bir mysala seredeliň

Mysal. Herekete getiriji “*A*” şkiw “*B*” şkiwi herekete getirýär. Kemeriň çekiji bölegininň dartyş güýji $T = 200\,kG$, çekilýän bölegininň dartyş güýji $t = 120\,kG$. “*A*” şkiwiň radiusy $r = 30\,sm$. “*A*” şkiw minutda 120 aýlaw edýär. “*A*” şkiw 10 aýlaw edende dartyş güýçleriniň umumy edýän işini kesgitlemeli. Şeýle-de, kemeriň berýän kuwwatyny tapmaly.

Çözülişi.



29.10-njy surat

“*A*” şkiwe goýlan güýçleriň umumy momenti:

$$m_{ayl} = T \cdot r - t \cdot r = (T - t) \cdot r = 80\,kG \cdot 30\,sm = 24\,kG\,m$$

10 aýlawda “*A*” şkiwiň aýlanma burçy $\varphi = 10 \cdot 2\pi = 62{,}8\,rad$. (29.20) formuladan edilen işi kesgitläliň:

$$A = m_{ayl} \cdot \varphi = 24\,kG\,m \cdot 62{,}8 = 1507\,kG\,m$$

Kemeriň geçirýän kuwwaty:

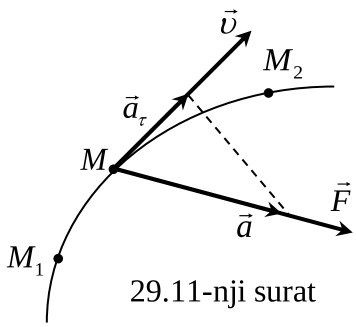
$$N = m_{ayl} \cdot \omega = 24\,kG\,m \cdot 12{,}56\frac{1}{sek} = 24 \cdot 12{,}56\frac{kG\,m}{sek} = \frac{24 \cdot 12{,}56}{75}\,a.g. \approx$$

$$\approx 4\,a.g. = 4 \cdot 736\,wt = 2944\,Wt\,.$$

29.7. Material nokadyň kinetik energiýasy. Material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

Mehanikanyň wajyp düşünjeleriniň biri bolan kinetik energiýa düşünjesi bilen tanyşalyň.

Goý, *m* massaly *M* nokat $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda käbir traýektoriýa boýunça M_1 nokatdan M_2 nokada hereket edýän bolsun.



29.11-nji surat

Dinamikanyň 2-nji kanunyna laýyklykda $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$. Bu deňligiň iki bölegini hem *M* nokadyň tizligininiň $(\vec{\upsilon})$ ugruna proýektirlesek,

$$m \cdot a \cdot \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right) = F \cdot \cos\left(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right)$$

deňligi alarys. Alnan deňligiň iki bölegini hem nokadyň elementar orunüýtgetmesine, ýagny *ds*-e köpeldeliň:

$$m \cdot a \cdot \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right) ds = F \cdot \cos\left(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right) ds \qquad (29.22)$$

Emma (29.22) deňligiň çep bölegindäki $a \cdot \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{\upsilon}\right)$ ululyk nokadyň a_τ galtaşma (tangensial) tizlenmesine deň, sag bölegindäki aňlatma bolsa, güýjüň elementar işi. Diýmek, $m \cdot a_\tau ds = dA$ ýa-da $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ deňligi göz öňünde tutup, $m\dfrac{d\upsilon}{dt} \cdot ds = dA$ deňligi alarys. Belli bolşy ýaly, $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon$. Diýmek, $m\upsilon d\upsilon = dA$ ýa-da

$$m d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = dA$$

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = dA \qquad (29.23)$$

Indi material nokadyň kinetik energiýasy düşünjesini getireliň.

Kesgitleme. Hereket edýän material nokadyň **kinetik energiýasy** ýa-da *"janly güýji"* diýip material nokadyň massasynyň nokadyň tizliginiň kwadratynyň ýarysyna köpeltmek hasylyna aýdylýar:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad (29.24)$$

T–material nokadyň kinetik energiýasy. Kinetik energiýanyň ölçeg birligi $[T] = kg\left(\dfrac{m}{sek}\right)^2 = kg\dfrac{m \cdot m}{sek^2} = N \cdot m$. Tehniki ölçeg birlikler sistemasynda, $kG \cdot m$.

Subut edilen (29.23) formulany teorema hökmünde tassyklalyň:

Material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema (differensial görnüşi).

Material nokadyň kinetik energiýasynyň differensialy nokada täsir edýän güýjüň elementar işine deň.

(29.23) deňligi M_1M_2 egri boýunça integrirläp alarys:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A \qquad (29.25)$$

Bu ýerde υ_1, υ_2 material nokadyň degişlilikde M_1, M_2 nokatlardaky tizligi, *A*– nokada täsir edýän güýjüň M_1M_2 aralykdaky işi.

(29.25) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

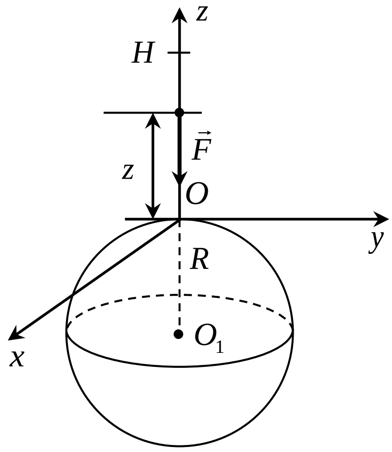
Material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

Material nokadyň kinetik energiýasynyň käbir aralykda üýtgemegi nokada täsir edýän güýjüň bu aralykdaky işine deň.

Teoremanyň ulanylyşynyň bir mysalyna seredeliň.

Mysal. Jisim uly *H* beýiklikden Ýere başlangyç tizliksiz $(\upsilon_0 = 0)$ gaçýar. Ýere düşen pursatynda jisimiň tizligini tapmaly. Howanyň garşylyk güýjüni göz öňünde tutmaly däl.

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny (O) Ýeriň ýüzünde alyp, z oky wertikal ýokary ugrukdyralyň. Uly beýikliklerde Ýeriň dartyş güýji Ýeriň merkezinden jisime çenli uzaklygyň kwadratyna ters proporsional: $F = \frac{km}{r^2}$. Bu ýerde m-jisimiň massasy, r-Ýeriň merkezinden jisime çenli uzaklyk, k-proporsionallyk koeffisiýenti.



29.12-nji surat

R–Ýeriň radiusy. $\vec{F}$ Ýeriň dartyş güýji, bu güýç z ok boýunça ugrukdyrylan,

$$F_x = 0\ , F_y = 0\ ,\ F_z = -\frac{km}{(R+z)^2}$$

Ýeriň ýüzünde dartyş güýji mg deň. Onda $\frac{km}{R^2} = mg$. Bu ýerden $k = gR^2$.

Dartyş güýjüniň işini hasaplamak üçin (29.9) formuladan peýdalanalyň:

$$A = \int_H^0 -\frac{km}{(R+z)^2}dz = \left.\frac{km}{R+z}\right|_H^0 = km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{kmH}{R(R+H)} = \frac{gR^2mH}{R(R+H)} = \frac{gRmH}{(R+H)}$$

Jisimiň Ýere düşen pursatynda tizligini υ bilen belgiläliň. (29.25) formuladan peýdalanalyň:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - 0 = \frac{gRmH}{R+H}$$

Bu ýerden $\upsilon = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$. Alnan deňlikde köküň içindäki drobuň maýdalawjysyny we sanawjysyny R-e bölüp, $\upsilon = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{R}}}$ aňlatmany alarys. Eger H ululyk Ýeriň radiusy bilen deňeşdirilende ujypsyz bolsa $\left(\frac{H}{R} << 1\right)$, onda ýokardaky aňlatmadan Galileýiň $\upsilon = \sqrt{2gH}$ formulasyny alarys.

§30. Potensial güýç meýdany.

1. **Güýç meýdany. Potensial güýç meýdany.**
2. **Potensial energiýa.**
3. **Energiýanyň saklanmak kanuny.**

30.1. Güýç meýdany. Potensial güýç meýdany.

Goý, giňişligiň käbir böleginiň (çäkli ýa-da çäksiz) islendik nokadynda ýerleşýän material nokada diňe nokadyň koordinatalaryna bagly güýç täsir edýän bolsun. Giňişligiň bu bölegine *güýç meýdany*, täsir edýän güýje bolsa *meýdan güýji* diýilýär.

$\vec{F}$ meýdan güýjüniň dekart oklary boýunça düzüjileri, ýagny F_x, F_y, F_z ululyklar nokadyň koordinatalaryna bagly üznüksiz funksiýalar bolup durýarlar, $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$. Goý, $U(x, y, z)$ koordinatalar funksiýasy tapylyp, bu funksiýanyň hususy önümleri degişlilikde meýdan güýjüniň düzüjilerine deň bolsun, ýagny

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z \qquad (30.1)$$

bolsun. Şeýle ýagdaýda güýç meýdanyna *potensial meýdan,* $U(x, y, z)$ funksiýa bolsa *güýç funksiýasy* diýilýär. Güýç funksiýasy hemişelik takyklygy bilen kesgitlenýär. Meýdan güýjüniň güýç funksiýasynyň gradiýenti bolýandygyny belläp geçeliň:

$$\vec{F} = grad(U) \qquad (30.2)$$

Güýç funksiýasynyň fiziki manysyny anyklamak üçin meýdan güýjüniň elementar işiniň aňlatmasyny ulanalyň:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \ ,$$

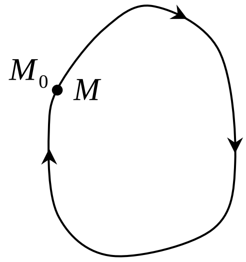
ýagny meýdan güýjüniň elementar işi güýç funksiýasynyň doly differensialyna deň, ýagny

$$dA = dU \qquad (30.3)$$

Diýmek, material nokat potensial meýdanda M_0 nokatdan M nokada geçende meýdan güýjüniň işi

$$A = \int_{M_0}^{M} dU = U - U_0 \qquad (30.4)$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde, $U = U(M)$, $U_0 = U(M_0)$. Eger U birbahaly funksiýa bolsa, (30.4) formuladan material nokadyň ýapyk traýektoriýasy boýunça meýdan güýjüniň işiniň nola deňdigi gelip çykýar.



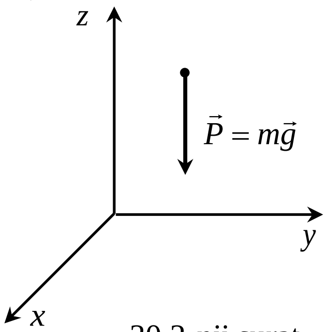
$$U(M)=U(M_0)$$

30.1-nji surat

Mysal hökmünde käbir güýç meýdanlary üçin güýç funksiýasyny kesgitläliň.

1) Agyrlyk meýdany.

Z okuny wertikal ýokary ugrukdyrsak, $\vec{P}$ agyrlyk güýjüniň düzüjileri $P_x=0$, $P_y=0$, $P_z=-mg$ bolar.



30.2-nji surat

Onda $dU=P_x dx+P_y dy+P_z dz=-mg\,dz$.

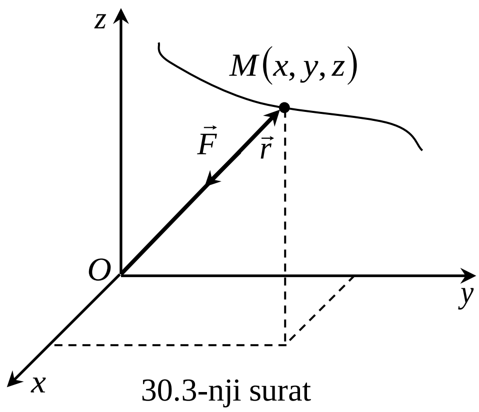
Bu ýerden integrirläp alarys:

$$U=-mgz+C\ , \tag{30.5}$$

C–hemişelik.

2) Nýuton güýjüniň meýdany.

Goý, material nokat gozganmaýan O nokada $F=\dfrac{km}{r^2}$ Nýuton güýji bilen çekilýän bolsun; bu ýerde r-material nokada O nokatdan geçirilen radius-wektoryň uzynlygy; k-proporsionallyk koeffisiýenti; m-nokadyň massasy.



30.3-nji surat

$\vec{F}$ güýjüň radius-wektora garşylykly ugrukdyrylandygyny göz öňünde tutup, $\vec{F}=-\dfrac{km}{r^3}\vec{r}$ deňligi ýazyp bileris.

Bu ýerden koordinatalar başlangyjyny O nokatda alsak, $\vec{F}$ güýjüň koordinata oklary boýunça düzüjileri şeýle aňladylar:

$$F_x = -\frac{km}{r^3}x \quad , \quad F_y = -\frac{km}{r^3}y \quad , \quad F_z = -\frac{km}{r^3}z \ , \qquad (30.6)$$

(x, y, z)-material nokadyň koordinatalary. Onda,

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{km}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = -\frac{km}{r^3}d\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{km}{r^3}d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -\frac{km}{r^3}r\,dr = -\frac{km}{r^2}dr \ .$$

Bu ýerden integrirläp

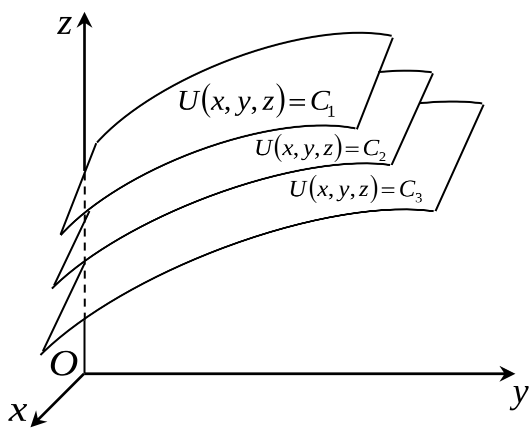
$$U = \frac{km}{r^2} + C \qquad (30.7)$$

aňlatmany alarys.

Güýç funksiýasynyň hemişelik bahasyny saklaýan, ýagny

$$U(x, y, z) = const \qquad (30.8)$$

deňligi kanagatlandyrýan nokatlar köplügi üst bolup durýar. Bu üste *dereje üsti* ýa-da *ekwipotensial üst* diýilýär. (30.4)-nji suratda dereje üstleri shemalaýyn görkezilen.



30.4-nji surat

(30.5) deňlikde $U = const$ goýsak, agyrlyk meýdanynda ekwipotensial üstleriň $z = const$ gorizontal tekizlikler bolýandygyny göreris. (30.7) deňlikde $U = const$ goýsak, Nýuton güýjüniň meýdanynda ekwipotensial üstleriň, merkezleri koordinatalar başlangyjynda bolan $r = const$ konsentrik sferalardygyny göreris.

30.2. Potensial energiýa.

Potensial güýç meýdanynda hereket edýan M material nokada seredeliň. (x, y, z)-bu nokadyň koordinatalary. $M_0(x_0, y_0, z_0)$-meýdanda erkin saýlanyp alnan gozganmaýan "nol" nokat.

Belgilemeler girizeliň: $U(M) = U$, $U(M_0) = U_0$. Potensial energiýa düşunjesini girizeliň.

Kesgitleme. Material nokat $M(x, y, z)$ nokatdan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokada geçende meýdan güýjüniň işine *M nokatdaky potensial energiýa* diýilýär. Başgaça aýdylanda, potensial energiýa nokatdaky energiýanyň "ätiýaçlyk mukdaryny" görkezýär. Potensial energiýany Π bilen belgilesek, (30.4) formuladan

$$\Pi = U_0 - U \tag{30.9}$$

deňligi alarys. Elbetde, “nol” nokatda potensial energiýa nola deň. “nol” nokat hökmünde $U = const$ deňleme bilen berilýän dereje üstüniň islendik nokadyny alyp bolýar. U_0 ululygyň hemişelikdigi sebäpli, (30.9) deňlemeden

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{30.10}$$

deňligi alarys. (30.1) deňlikden (30.10) formulanyň esasynda taparys:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}\ ,\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}\ ,\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \tag{30.11}$$

30.3. Energiýanyň saklanmak kanuny.

Goý, M_1 we M_2 nokatlar potensial meýdanda hereket edýän nokadyň dürli orunlary bolsun. U_1, U_2-güýç funksiýasynyň degişlilikde M_1, M_2 nokatlardaky bahasy. Nokadyň kinetik energiýasynyň deňlemesini ulanalyň:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A$$

Işiň güýç funksiýanyň bahalarynyň tapawudyna deňdigi sebäpli,

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = U_2 - U_1$$

(30.9) formulanyň esasynda: $\Pi_1 = U_0 - U_1$, $\Pi_2 = U_0 - U_2$. Bu ýerde Π_1, Π_2-degişlilikde M_1, M_2 nokatlardaky potensial energiýa. Bu deňliklerden $U_1 = U_0 - \Pi_1$, $U_2 = U_0 - \Pi_2$ deňlikleri alarys. Bu ululyklary kinetik energiýanyň deňlemesinde goýup alarys:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2$$

ýa-da

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + \Pi_2\ ,$$

ýagny

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + \Pi = const \tag{30.12}$$

Şeýlelik bilen, **material nokat potensial meýdanda hereket edende, onuň kinetik we potensial energiýalarynyň jemi üýtgemeýär.**

Alnan netije mehaniki energiýanyň saklanmak kanuny bolup, energiýanyň saklanmagy baradaky fiziki kanunyň hususy görnüşidir.

§31. Erkin däl material nokadyň hereketiniň differensial deňlemeleri.

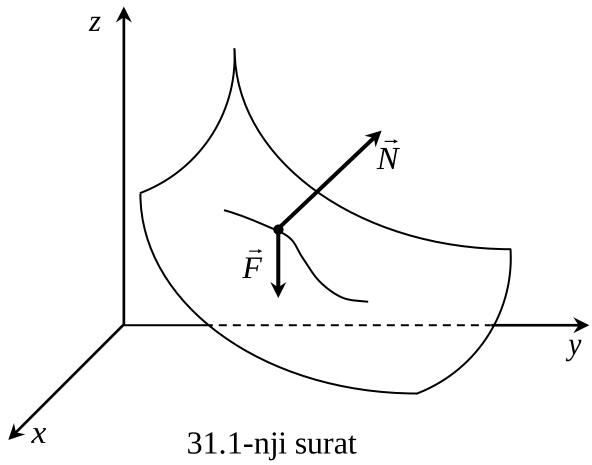
1. **Erkin däl material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň Lagranž formasy.**
2. **Erkin däl material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň Eýler formasy.**

31.1. Erkin däl material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň Lagranž formasy.

Eger material nokadyň hereketi baglanyşyk bilen çäklenen bolsa, onda bu nokada *erkin däl* material nokat diýilýär.

Goý, M material nokat $f(x, y, z) = 0$ deňleme bilen berlen üst boýunça $\vec{F}$ güýjün täsiri astynda hereket edýän bolsun. Bu nokadyň hereketi öwrenilende üstüň reaksiýasy göz öňünde tutulmaly. Berlen üst ýylmanak bolan ýagdaýynda üstüň reaksiýasy bu üstün normaly boýunça ugrukdyrylan. Reaksiýa güýjüni $\vec{N}$ bilen belgiläp, dinamikanyň 2-nji kanunynyň esasynda alarys:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \qquad (31.1)$$



31.1-nji surat

(31.1) wektor deňligi koordinata oklaryna proýektirläp, nokadyň hereketiniň deňlemesini

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x + N_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y + N_y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z + N_z \end{cases} \qquad (31.2)$$

deňlemeler sistemasy görnüşinde alarys.

Bu deňlikleriň sag bölegindäki birinji goşulyjylar $\vec{F}$ güýjüň dekart oklary boýunça düzüjileri, ikinji goşulyjylar reaksiýa güýjüniň dekart oklary boýunça düzüjileridir.

$$N_x = N\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{i}}\right), \quad N_y = N\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{j}}\right), \quad N_z = N\cos\left(\widehat{\vec{N}, \vec{k}}\right).$$

Differensial deňlemeler kursundan belli bolşy ýaly, $f(x,y,z)=0$ deňleme bilen berilýän üstüň normalynyň ugrukdyryjy kosinuslary şeýle tapylýar:

$$\cos\left(\vec{N},\hat{\vec{i}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}\ ,\ \cos\left(\vec{N},\hat{\vec{j}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}\ ,\ \cos\left(\vec{N},\hat{\vec{k}}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}\ ,$$

bu ýerde $\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ –f funksiýanyň **I differensial parametri** diýip atlandyrylýan ululyk.

Ugrukdyryjy kosinuslary hereketiň differensial deňlemesinde goýup,

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+\frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\\ m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+\frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\\ m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z+\frac{N}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\end{cases} \tag{31.3}$$

sistemany alarys. $\frac{N}{\Delta f}$ gatnaşygy λ bilen belgiläp, (31.3) sistemany

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\\ m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\\ m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\end{cases} \tag{31.4}$$

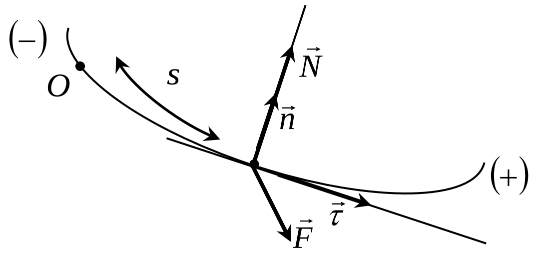
görnüşe getireliň.

Bu deňlemeler sistemasyna erkin däl nokadyň hereketiniň *Lagranž formadaky differensial deňlemesi* diýilýär.

Baglanyşygyň $f(x,y,z)=0$ deňlemesini ulanyp, (31.4) sistemadan x,y,z we λ ululyklaryň wagta görä üýtgeýşini tapyp bolýar. Şeýlelikde, nokadyň hereketi kesgitlenýär, $N=\lambda\cdot\Delta f$ deňlikden üstüň reaksiýasy kesgitlenýär.

31.2. Erkin däl material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň Eýler formasy.

Nokadyň tekizlikdäki hereketine seredeliň. Goý, nokat $f(x,y)=0$ deňleme bilen berlen tekiz egriniň üstünde $\vec{F}$ güýjün täsiri astynda hereket edýän bolsun. Meselem, şarjagazyň egri turbajyk boýunça hereketi. Nokadyň tekizlikdäki hereketi öwrenilende $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{N}$ deňlemäni tebigy koordinata oklaryna proýektirlemek amatly bolýar. Bu ýerde $\vec{N}$-egriniň reaksiýasy, egriniň üsti ýylmanak bolanda $\vec{N}$ güýç egriniň normaly boýunça ugrukdyrylan.



31.2-nji surat

s-duga koordinatasy; *O*-duga koordinatasynyň başlangyjy.

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$ deňlemäni tebigy koordinata oklaryna proýektirläp,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau \ , \ \frac{m\upsilon^2}{\rho} = F_n + N \qquad (31.5)$$

deňlemeleri alarys; ρ-traýektoriýanyň nokatdaky egrilik radiusy.

(31.5) deňlemeleriň birinjisini integrirlemek bilen nokadyň tizligi kesgitlenýär. Tapylan tizligi ikinji deňlemede goýup, *N* reaksiýa güýjüniň ululygy tapylýar.

(31.5) deňlemelere nokadyň hereket deňlemesiniň **Eýler formasy** diýilýär.

Bellik. Eger nokadyň hereket edýän üsti ýa-da egrisi ýylmanak däl bolsa, onda hereket deňlemeleri düzülende sürtülme güýjüni hem göz öňünde tutmaly. Bu ýagdaýda nokadyň hereket deňlemesi

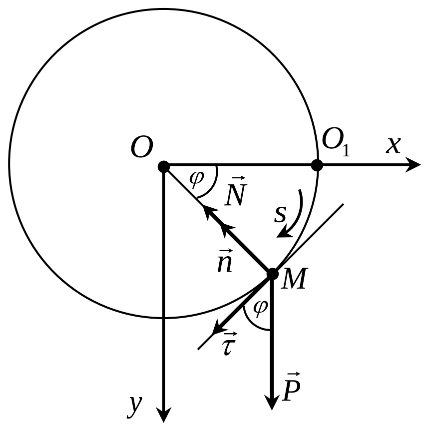
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_s \qquad (31.6)$$

görnüşde bolýar, bu ýerde $\vec{F}_s$-sürtülme güýji.

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. Massasy *m* bolan *M* nokat agyrlyk güýjüniň täsiri astynda wertikal tekizlikde ýerleşýän *r* radiusly töwerek görnüşli turbajygyň içinde hereket edýär. Bu nokadyň hereketiniň differensial deňlemesiniň Lagranž we Eýler formalaryny ýazmaly.

Çözülişi. *x,y* oklaryny 31.3-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň.



31.3-nji surat

Agyrlyk $\vec{P}$ güýjüniň dekart oklary boýunça düzüjileri $P_x = 0$, $P_y = mg$.

Baglanyşygyň deňlemesi (*r* radiusly töwerek):

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Bu ýerden $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\Delta f = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$ deňligiň esasynda hereketiň differensial deňlemesiniň Lagranž formasyny şeýle görnüşde ýazyp bileris:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg + 2\lambda y \end{cases}$$

Baglanyşygyň reaksiýasy $N = 2r \cdot \lambda$ bolar.

Hereketi öwrenilýän nokat üçin hereketiň differensial deňlemesiniň Eýler formasyny ýazalyň. Munuň üçin $\vec{P}$ güýji normal we galtaşýan ugurlara proýektirläp,

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2} = mg\cos\varphi \\ \dfrac{m\upsilon^2}{r} = -mg\sin\varphi + N \end{cases} \qquad (*)$$

deňlemeleri alarys. Bu ýerde s-O_1M duganyň uzynlygy. $S = r \cdot \varphi$ deňligi ulanalyň. Onda $\dfrac{ds}{dt} = r\dfrac{d\varphi}{dt}$ we $\dfrac{d^2s}{dt^2} = r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

Diýmek, (*) sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \dfrac{g}{r}\cos\varphi \\ \dfrac{m\upsilon^2}{r} = -mg\sin\varphi + N \end{cases} \qquad (**)$$

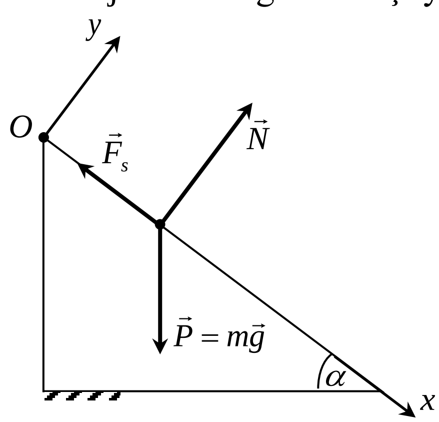
görnüşe geler.

Alnan (**) deňlemeler öwrenilýän hereketiň differensial deňlemesiniň Eýler formasy. Bu sistemanyň ikinji deňlemesinden:

$$N = \frac{m\upsilon^2}{r} + mg\sin\varphi$$

Mysal. *M* material nokat ýylmanak bolmadyk ýapgyt tekizlikde $\vec{P}$ agyrlyk güýjüniň täsirinde gönüçyzykly hereket edýär. Ýapgyt tekizligiň ýapgytlyk burçy α. Nokat bilen tekizligiň arasyndaky sürtülme koeffisiýent *f*. Nokadyň hereket deňlemesini tapmaly.

Çözülişi. Koordinata oklaryny 31.4-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň:



31.4-nji surat

Bu nokadyň hereket deňlemesini, ýagny $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_s$ deňlemäni x,y oklaryna proýektirläliň:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - F_s \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = N - mg\cos\alpha \end{cases} \qquad (*)$$

Öwrenilýän nokat üçin $y = 0$. Diýmek, (*) sistemanyň ikinji deňlemesinden $N = mg\cos\alpha$ bolýandygyny alarys. $F_s = f \cdot N$ deňligi ulanyp (*) sistemanyň birinji deňlemesinden $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - f\cdot mg\cos\alpha$ ýa-da $\dfrac{d\upsilon}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ deňlemäni alarys.

Bu deňlemäni integrirläliň.

$$d\upsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} dV = \int_0^t g(\sin\alpha - f\cos\alpha)d\tau$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$$

bu ýerden

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t \;\Rightarrow\; dx = (\upsilon_0 + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x} ds = \int_0^t (\upsilon_0 + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau)d\tau$$

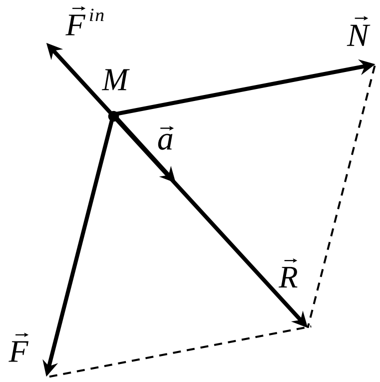
$$x = x_0 + \upsilon_0 t + g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

Alnan deňleme nokadyň ýylmanak däl ýapgyt tekizlik boýunça hereketiniň deňlemesi bolup durýar

§32. Material nokat üçin Dalamberiň prinsipi.

Dinamikanyň meselelerinde statikanyň kanunlarynyň ulanylyş usulynyň düýbüni tutýan Dalamberiň prinsipi bilen tanyşalyň.

Erkin däl M material nokadyň hereketine seredeliň. $\vec{F}$-nokada goýlan güýç, $\vec{N}$-baglanyşygyň reaksiýa güýji. $\vec{N}$ we $\vec{F}$ güýçleri goşup, bu güýçleriň deňtäsiredijisi $\vec{R}$ güýji taparys.



32.1-nji surat

Dinamikanyň esasy kanunyna laýyklykda, $\vec{R}$ güýç nokadyň tizlenmesi, $\vec{a}$ bilen ugurdaş, ululygy boýunça $m \cdot a$ ululyga deň. M nokada ululygy boýunça $m \cdot a$ deň bolan, nokadyň tizlenmesine garşylykly ugrukdyrylan $\vec{F}^{in}$ güýç bilen täsir edeliň. Bu güýje *inersiýa güýji* diýilýär we

$$\vec{F}^{in} = -m \cdot \vec{a} \qquad (32.1)$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Elbetde, statikanyň birinji aksiomasyna laýyklykda, $\vec{R}$ we $\vec{F}^{in}$ güýçler deňagramlaşýar. Onda $\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$ bolany üçin

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{in} = \vec{0} \qquad (32.2)$$

deňligi alarys. Şeýlelik bilen, şu netijä gelindi:

Her wagt pursatynda hereket edýän nokada goýlan güýç, reaksiýa güýji we inersiýa güýji deňagramlaşýarlar.

Ýokarda getirilen netijä material nokat üçin *Dalamberiň prinsipi* diýilýär.

$\vec{F}^{in} = -m \cdot \vec{a}$ wektor deňligi dekart koordinata oklaryna proýektirläp, inersiýa güýjüniň bu oklar boýunça düzüjilerini taparys:

$$\begin{cases} F_x^{in} = -m \cdot a_x = -m \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y^{in} = -m \cdot a_y = -m \dfrac{d^2 y}{dt^2} \\ F_z^{in} = -m \cdot a_z = -m \dfrac{d^2 z}{dt^2} \end{cases} \qquad (32.3)$$

Şuňa meňzeşlikde, şol wektor deňligi tebigy koordinata oklaryna proýektirläp, inersiýa güýjüniň bu oklar boýunça düzüjilerini alarys:

$$\begin{cases} F_\tau^{in} = -m \cdot a_\tau = -m \dfrac{d\upsilon}{dt} \\ F_n^{in} = -m \cdot a_n = -m \dfrac{\upsilon^2}{\rho} \\ F_b^{in} = -m \cdot a_b = 0 \end{cases} \qquad (32.3)$$

“Inersiýa güýji” adalgasyny düşündirmek maksady bilen aşakdaky mysala seredeliň.

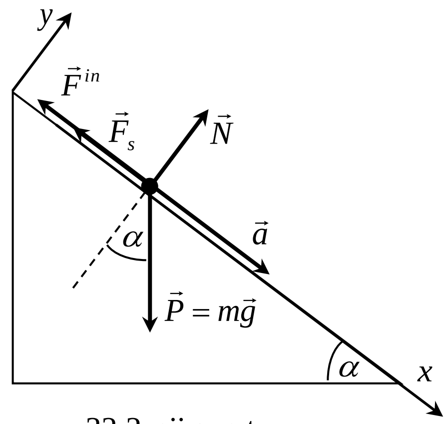
Işçi m massaly arabajygy itekläp, arabajyga $\vec{a}$ tizlenme berýär. Şeýlelikde, arabajyga $F = m \cdot a$ güýç täsir edýär. Şol bir wagtda işçä $m \cdot a$ deň bolan inersion garşylyk güýji täsir edýär. Bu garşylyk güýji inersiýa güýjüdir.

Bellik. Dinamikanyň meselesi işlenende inersiýa güýjüni girizsek Dalamberiň prinsipi boýunça deňagramlaşan güýçler sistemasyny alýarys. Diýmek, statikanyň deňlemelerinden peýdalanmak bolar. Bu usula *kinetostatiki usul* diýilýär.

Dalamberiň prinsipiniň ulanylyşyna degişli birnäçe mysallara seredeliň.

Mysal. m massaly material nokat ýapgytlyk burçy α bolan ýylmanak däl ýapgyt tekizlik boýunça agyrlyk güýjüniň täsirinde gönüçyzykly hereket edýär. Bu nokadyň tizlenmesini tapmaly.

Çözülişi. x,y oklaryny 32.2-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň.



32.2-nji surat

Eger nokada $\vec{F}^{in}$ güýç bilen täsir etsek, onda Dalamberiň prinsipi boýunça $\vec{F}^{in}$, $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_s$ güýçler deňagramlaşýarlar, ýagny

$$\vec{F}^{in}+\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_s=\vec{0}\ . \qquad (*)$$

(*) wektor deňligi *x,y* oklaryna proýektirläp alarys:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f\cdot N - ma = 0\ , \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

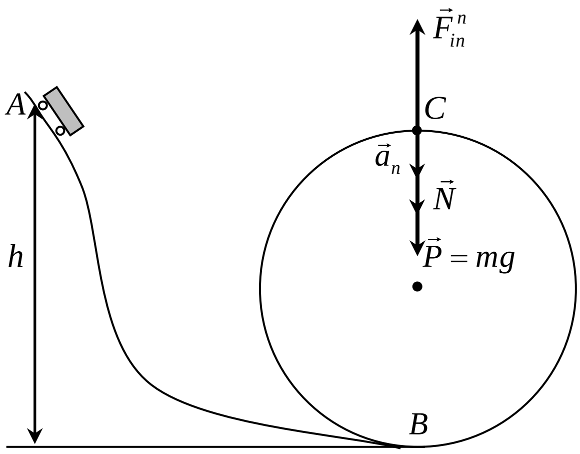
Ikinji deňlemeden alynýan $N = mg\cos\alpha$ ululygy birinji deňlemede goýup taparys:

$$mg\sin\alpha - f\cdot mg\cos\alpha - ma = 0$$

Bu deňlemeden nokadyň $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ tizlenmesini alarys.

Mysal. *m* massaly arabajyk başlangyç tizliksiz $(\upsilon_0 = 0)$ *h* beýiklikden ýylmanak relsler boýunça hereket edip, wertikal tekizlikde ýerleşýän *r* radiusly töweregiň içki ýüzi boýunça hereket edýär. *h* ululyk nähili şerti kanagatlandyranda şeýle hereket mümkin?

Çözülişi.



32.3-nji surat

Töweregiň iň ýokarky *C* nokadynda Dalamberiň prinsipini ulanalyň. $\vec{F}^{in}$, $\vec{P}$, $\vec{N}$ güýçler deňagramlaşýarlar. Arabajyk töweregiň içki ýüzi boýunça hereket edýändigi sebäpli $\vec{N}$ güýç aşak ugrukdyrylan. Wertikal ugur boýunça

$$F_n^{in} - mg - N = 0$$

deňligi alarys, bu ýerden $N = F_n^{in} - mg$. $F_n^{in} = ma_n = \dfrac{m\upsilon^2}{r}$ deňligi ulansak, reaksiýa güýjüniň

$$N = \frac{m\upsilon^2}{r} - mg \qquad (*)$$

bolýandygyny taparys.

C nokatda $m\upsilon^2$ ululygy tapmak üçin kinetik energiýanyň deňlemesini düzeliň. ABC ýolda agyrlyk güýjüniň işiniň $mg(h-2r)$ ululyga deňdigini ulanyp taparys:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg(h-2r)\ ,$$

bu ýerden

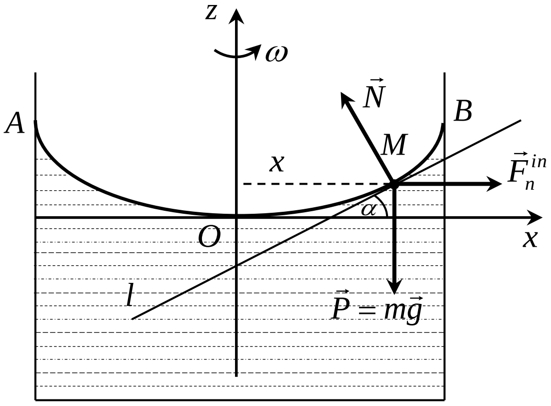
$$m\upsilon^2 = 2mg(h-2r)\ .$$

Onda (*) deňlemeden reaksiýa güýjüniň $N = mg\left(\dfrac{2h}{r} - 5\right)$ bolýandygyny kesgitläris.

Elbetde, arabajygyň doly töweregi geçmegi üçin $N \geq 0$ şert ýerine ýetmeli. Onda

$$N \geq 0 \Rightarrow \frac{2h}{r} - 5 \geq 0 \Rightarrow h \geq 2{,}5r$$

Mysal. Içi suwuklykly silindr görnüşli gap wertikal okuň daşynda $\omega = const$ burç tizlikli aýlanýar. Suwuklygyň erkin üstüniň formasyny kesgitlemeli.



32.4-nji surat

Çözülişi. Suwuklygyň ýüzünde suwuklygyň damjasyny material nokat (M) hökmünde kabul edeliň. Bu nokatdan we aýlanma okundan geçýän tekizlik suwuklygyň ýüzüni käbir AOB egri boýunça keser. M nokada $\vec{P}$ agyrlyk güýji we suwuklygyň $\vec{N}$ reaksiýasy täsir edýär. M nokada $\vec{F}_n^{in}$ normal inersiýa güýjüni goýalyň ($\omega = const$; diýmek, $\varepsilon = 0$, onda $F_\tau^{in} = 0$).

Görşümiz ýaly, $F_n^{in} = \dfrac{m\upsilon^2}{x} = \dfrac{m(\omega x)^2}{x} = m\omega^2 x$.

M nokatdan AOB egrä l galtaşýan göni çyzygy geçireliň we $\vec{F}^{in} + \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$ deňligi bu galtaşýana proýektirläliň:

$$m\omega^2 x \cos\alpha - mg \sin\alpha = 0 \qquad (*)$$

Bu ýerde, α-l galtaşýan göni çyzyk bilen x okunyň arasyndaky burç. (*) deňlemeden $tg\alpha = \frac{\omega^2}{g}x$ aňlatmany alarys. $tg\alpha$-ny $\frac{dy}{dx}$ bilen çalşyryp we alnan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x$$

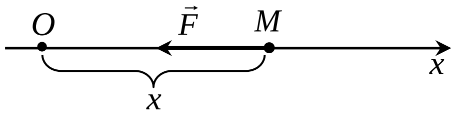
differensial deňlemäni integrirläp, AOB egriniň $y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$ deňlemesini alarys. Alnan deňleme parabolanyň deňlemesi. Diýmek, suwuklygyň erkin üsti aýlanma paraboloid bolup durýar.

§33. Material nokadyň yrgyldyly hereketi.

1. **Material nokadyň garmoniki yrgyldyly hereketi.**
2. **Togtaýan yrgyldylar.**
3. **Mejbury yrgyldylar.**

33.1. Material nokadyň garmoniki yrgyldyly hereketi.

Goý, M material nokat gozganmaýan O merkeze çekýän $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda gönüçyzykly hereket edýän bolsun. $\vec{F}$ güýjüň ululygyny M nokatdan O merkeze çenli uzaklyga göni proporsional diýip alalyň, ýagny $F = c \cdot OM$. Bu ýerde c-proporsionallyk koeffisiýenti, $c > 0$. M nokadyň hereket deňlemesini kesgitläliň. Koordinatalar başlangyjyny O nokatda alyp, nokadyň hereket edýän göni çyzygyny x oky hökmünde kabul edeliň.



33.1-nji surat

x–M nokadyň koordinatasy.

F güýjüň OM aralyga proporsionaldygyny we O nokada tarap ugrukdyrylandygyny göz öňünde tutup, dinamikanyň ikinji kanunyndan M nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \tag{33.1}$$

görnüşde alarys. Bu deňlemäni m-e gysgaldyp, $\frac{c}{m} = k^2$ belgilemäni girizip,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \tag{33.2}$$

görnüşe getireliň. Differensial deňlemeler kursundan belli bolşy ýaly, (33.2) deňlemäniň umumy çözüwi

$$x = a\sin(kt + \alpha) \tag{33.3}$$

görnüşdedir; a, α–islendik hemişelikler. Alnan deňleme *garmoniki* yrgyldylaryň deňlemesidir. Diýmek, *merkeze çekýän, ululygy boýunça merkeze çenli uzaklyga göni proporsional güýjüň täsirinde material nokat garmoniki yrgyldyly hereket edýär.*

(33.3) deňlemedäki a ululyga **yrgyldylaryň amplitudasy**, $kt+\alpha$ argumente **yrgyldylaryň fazasy**, α–ululyga bolsa, **başlangyç faza** diýilýär.

Garmoniki yrgyldyly hereket edýän nokadyň tizligi

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = ak\cos(kt+\alpha) \tag{33.4}$$

formula bilen kesgitlenýär; υ ululygyň alamaty nokadyň hereket ugruny kesgitleýär.

Yrgyldylaryň a amplitudasy we α başlangyç fazasy hereketiň başlangyç şertlerinden tapylýar. Goý, başlangyç pursatda $(t=0)$ material nokadyň koordinatasy x_0, tizligi υ_0 bolsun. (33.3), (33.4) deňlemelerde $t=0$ goýup,

$$x_0 = a\sin\alpha$$

$$\upsilon_0 = ak\cos\alpha$$

deňlikleri alarys. Bu deňliklerden kesgitläris:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{k^2}}\ , \quad tg\alpha = \frac{k\,x_0}{\upsilon_0} \tag{33.5}$$

Material nokadyň berlen orna şol bir tizlikli gaýdyp gelýän wagt aralygyna **yrgyldynyň doly periody** diýilýär.

Doly periody T bilen belgiläliň. Sinus funksiýanyň periodynyň 2π deňdigi sebäpli taparys:

$$k(t+T)+\alpha-(kt+\alpha)=2\pi\ ,$$

bu ýerden $T=\frac{2\pi}{k}$, ýa-da k-nyň ýerine $\sqrt{\frac{c}{m}}$– i goýup,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \tag{33.6}$$

deňligi alarys. Bu deňlikden görşümiz ýaly, doly period hereketiň başlangyç şertlerine bagly däl.

(33.6) formuladan $k=\frac{2\pi}{T}$; diýmek, k ululyk nokadyň 2π sekunt wagtyň dowamynda doly yrgyldylarynyň sanyny görkezýär. Bu ululyga yrgyldynyň **aýlaw ýygylygy** diýilýär.

Käbir halatlarda garmoniki yrgyldylaryň deňlemesini başga görnüşde ulanmak amatly bolýar, ýagny belli trigonometrik formuladan peýdalanyp, (33.3) deňligi üýtgedip ýazalyň:

$$x = a\sin(kt)\cdot\cos\alpha + a\cos(kt)\cdot\sin\alpha$$

Bu ýerden $a\cos\alpha = A,\ a\sin\alpha = B$ belgilemeleri girizip, garmoniki yrgyldylaryň hereket deňlemesini

$$x = A\sin(kt) + B\cos(kt) \tag{33.7}$$

görnüşde ýazyp bileris.

Ýokarda getirilen $a \cdot \sin\alpha = x_0$ we $ak \cdot \cos\alpha = \upsilon_0$ deňlikleri ulanyp, $A = \frac{\upsilon_0}{k}$ we $B = x_0$ bolýandygyny taparys. Onda garmoniki yrgyldylaryň hereket deňlemesini aşakdaky görnüşde alarys:

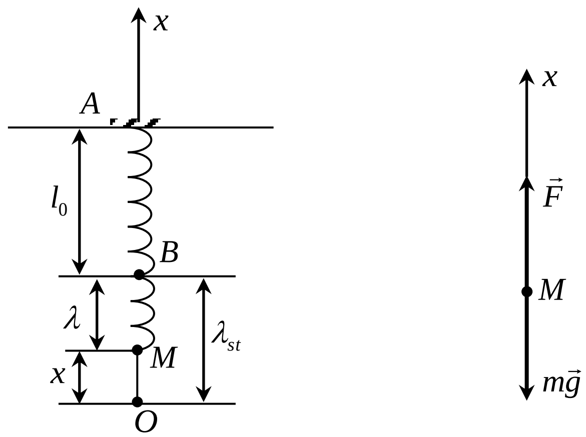
$$x = x_0 \cos(kt) + \frac{\upsilon_0}{k} \sin(kt) \tag{33.8}$$

Garmoniki yrgyldylara degişli bir mysala seredeliň.

Mysal. *C* gatylyk koeffifiyentli *AB* pružin wertikal halatda *A* nokatda berkidilen we onuň *B* nokadyna *m* massaly ýük (*M*) asylan. Ýüküň hereketiniň differensial deňlemesini ýazmaly, periodyny kesgitlemeli.

Meseläni çözmeklige girişmegimizden öň “statiki uzalma” düşünjesini girizeliň. Pružine jisim birikdirilip, wertikal aşak goýberilenden soň jisim käbir aralyk geçip, statiki deňagramlyk ýagdaýyna eýe bolýar. Pružiniň uzalýan aralygyna *statiki uzalma* diýilýär. Bu uzalmany λ_{st} bilen belgiläliň. Elbetde, $c \cdot \lambda_{st} = mg$ deňlik ýerine ýetmeli. Bu ýerden $\lambda_{st} = \frac{mg}{c}$.

Çözülişi.



33.2-nji surat

Pružiniň uzalmasyny λ bilen belgiläliň. 33.2-nji suratdan görşümiz ýaly,

$$\lambda = \lambda_{st} - x .$$

Gukuň kanuny boýunça *F* maýyşgaklyk güýji (pružiniň reaksiýasy) pružiniň λ uzalmasyna göni proporsional, $F = c \cdot \lambda$. Dinamikanyň ikinji kanunyna laýyklykda ýüküň hereketiniň differensial deňlemesi $m\frac{d^2x}{dt^2} = F - mg$ görnüşe eýedir ýa-da $m\frac{d^2x}{dt^2} = c\lambda - mg$. Bu ýerde λ-ny $\lambda_{st} - x$ bilen çalşyryp, $m\frac{d^2x}{dt^2} = c \cdot \lambda_{st} - cx - mg$ deňlemä geleris; emma $c \cdot \lambda_{st} = mg$. Onda ýokardaky deňlemeden $(c \cdot \lambda_{st} - mg = 0)$ $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ deňlemäni alarys. Alnan deňleme garmoniki yrgyldylaryň deňlemesidir.

Diýmek, pružinden asylan ýük özüniň deňagramlyk ýagdaýynyň töwereginde garmoniki yrgyldyly hereket edýär. Bu yrgyldylaryň periody:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\lambda_{st}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}$$

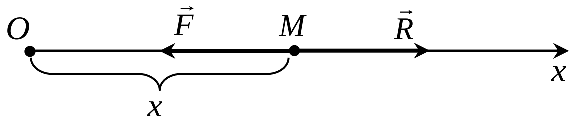
Bellik. λ_{st} statiki uzalma tejribe üsti bilen kesgitlenýär. $c=\dfrac{mg}{\lambda_{st}}$ deňlikden pružiniň gatylyk koeffisiýentini kesgitläp bolýar.

33.2. Togtaýan yrgyldylar.

Goý, M material nokat gozganmaýan O merkeze çekýän, ululygy boýunça merkeze çenli uzaklyga göni proporsional $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda garşylyk görkezýän gurşawda gönüçyzykly hereket edýän bolsun.

Garşylyk güýjüni $\vec{R}$ bilen belgiläliň we nokadyň tizligine göni proporsional diýip alalyň, ýagny $\vec{R}=-\mu\cdot\vec{\upsilon}$. Bu ýerde $\vec{\upsilon}$–material nokadyň tizligi; μ–proporsionallyk koeffisiýenti.

Koordinatalar başlangyjyny O nokatda alalyň we nokadyň hereket edýän göni çyzygyny x oky hökmünde kabul edeliň.



33.3-nji surat

$\vec{R}$ güýjüň tizlige garşylykly ugrukdyrylandygyny, şeýle hem, $\vec{F}$ güýjüň koordinatalar başlangyjyna tarap ugrukdyrylandygyny göz öňünde tutup, M nokat üçin dinamikanyň ikinji kanunyny

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\upsilon \tag{33.9}$$

görnüşde ýazalyň, ýa-da $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$ deňligi ulanyp, şeýle-de, $\dfrac{c}{m}=k^2,\ \dfrac{\mu}{m}=2n$ belgilemeleri girizip, (33.9) deňlemäni

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{33.10}$$

görnüşde ýazalyň. Alnan deňlemäni çözmek üçin ornuna goýmak usulyny ulanalyň. x funksiýany $x=y\cdot e^{-nt}$ görnüşde gözläliň. x-i differensirläp alarys:

$$\frac{dx}{dt}=e^{-nt}\left(\frac{dy}{dt}-n\cdot y\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-nt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}+n^2y\right).$$

x-i we x-iň önümlerini (33.10) deňlemede ýerine goýalyň we alnan deňlemäni $e^{-nt}\neq 0$ ululyga gysgaldalyň. Netijede

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(k^2-n^2\right)y=0 \tag{33.11}$$

deňlemäni alarys. Goý, $k>n$ bolsun. Onda $k_1^2=k^2-n^2$ belgilemäni girizeliň we (33.11) deňlemäni

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k_1^2\cdot y=0 \tag{33.12}$$

görnüşe getireliň. Alnan deňlemä nokadyň garmoniki hereketi öwrenilende gabat gelipdik ((33.2) deňleme).

(33.12) deňlemäniň umumy çözüwi $y = a\sin(k_1 t + \alpha)$, diýmek,

$$x = a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \tag{33.13}$$

Bu deňleme (33.3) deňlemeden e^{-nt} köpeldiji bilen tapawutlanýar. (33.13) deňleme boýunça hereket edýän nokadyň hereketi hem *O* nokadyň töwereginde yrgyldyly hereket bolup durýar, ýöne e^{-nt} köpeldijiniň wagt geçdigiçe kiçelýändigi sebäpli, material nokat *O* gozganmaýan nokada tükeniksiz ýakynlaşýar. Şol sebäpli, material nokadyň bu yrgyldyly hereketine **togtaýan yrgyldylar** diýilýär.

(33.13) deňligi wagt boýunça differensirläp, material nokadyň tizligini taparys:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = a \cdot e^{-nt}\left[k_1 \cdot \cos(k_1 t + \alpha) - n \cdot \sin(k_1 t + \alpha)\right] \tag{33.14}$$

a we α hemişelikler $x(0) = x_0$, $\upsilon(0) = \upsilon_0$ başlangyç şertlerden kesgitlenýär. (33.13), (33.14) formulalarda $t = 0$ goýup, alarys:

$$x_0 = a \cdot \sin\alpha \ , \ \ \upsilon_0 = a \cdot k_1 \cdot \cos\alpha - n \cdot x_0$$

ýa-da $x_0 = a \cdot \sin\alpha$, $a \cdot \cos\alpha = \dfrac{\upsilon_0 + n \cdot x_0}{k_1}$. Bu deňlikleri kwadrata göterip goşsak *a* ululygy kesgitläris. Birinji deňlemäni ikinji deňlemä bölüp, $tg\alpha$ -ny taparys, ýagny

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (\upsilon_0 + n \cdot x_0)^2} \\ tg\alpha = \dfrac{k_1 x_0}{\upsilon_0 + n \cdot x_0} \end{cases} \tag{33.15}$$

M nokadyň hereketini has takyk öwrenmek üçin *t* ululygyň haýsy bahalarynda tizligiň nola deňdigini kesgitläliň. Munuň üçin (33.14) deňligi nola deňläliň:

$$k_1 \cdot \cos(k_1 t + \alpha) - n \cdot \sin(k_1 t + \alpha) = 0$$

ýa-da

$$tg(k_1 t + \alpha) = \frac{k_1}{n}$$

Bu ýerden alarys:

$$t = \frac{1}{k_1}\left(arctg\frac{k_1}{n} - \alpha\right) \tag{33.16}$$

Arktangens funksiýa köpbahaly funksiýa. Şol bir argumentde *arctg*-ň yzygider bahalary π goşulyjy bilen tapawutlanýarlar. Diýmek, (33.16) deňlemäni kanagatlandyrýan *t* ululygyň yzygider bahalary $\dfrac{\pi}{k_1}$ goşulyjy bilen tapawutlanýarlar. Eger *t* ululygyň yzygider bahalaryny $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ bilen belgilesek, onda:

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k_1}\ , \ t_3 = t_2 + \frac{\pi}{k_1} = t_1 + \frac{2\pi}{k_1}\ , \ t_4 = t_3 + \frac{\pi}{k_1} = t_1 + \frac{3\pi}{k_1}\ ,\ldots,\ t_n = t_1 + \frac{(n-1)\cdot\pi}{k_1}$$

Şeýlelik bilen, t_1–den başlap her bir $\frac{\pi}{k_1}$ wagt aralygyndan soň nokadyň tizligi nola deň bolup, alamatyny üýtgedýär. Başgaça aýdylanda, nokadyň hereketiniň ugry üýtgeýär.

$t_1, t_2, t_3, \ldots$ yzygiderlikdäki wagt pursatlary üçin material nokadyň koordinatalaryny kesgitläliň:

$x_1 = x(t_1) = a \cdot e^{-nt_1} \sin(k_1 t_1 + \alpha)$, $x_2 = x(t_2) = a \cdot e^{-nt_2} \sin(k_1 t_2 + \alpha)$,

$x_3 = x(t_3) = a \cdot e^{-nt_3} \sin(k_1 t_3 + \alpha)$ we ş.m.

t_2-ni $t_1 + \frac{\pi}{k_1}$ bilen çalşyralyň:

$$x_2 = a \cdot e^{-nt_1 - \frac{n\pi}{k_1}} \cdot \sin(k_1 t_1 + \alpha + \pi) = -a \cdot e^{-nt_1} \cdot \sin(k_1 t_1 + \alpha) \cdot e^{-\frac{n\pi}{k_1}} = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} x_1 .$$

Şuňa meňzeşlikde alarys:

$x_3 = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} \cdot x_2$, $x_4 = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} \cdot x_3$, $x_5 = -e^{-\frac{n\pi}{k_1}} \cdot x_4$ we ş.m.

Üns bersek, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ yzygiderligiň elementleriniň absolýut ululyklaryndan düzülen yzygiderlik, ýagny $|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots$ yzygiderlik 1-den kiçi $e^{-\frac{n\pi}{k_1}}$ maýdalawjyly kemelýän geometrik progressiýa bolup durýar. Diýmek, material nokat gitdigiçe O nokada ýakynlaşýar, ýagny yrgyldylaryň amplitudasy nola ymtylýar. Şu sebäpli (ýokarda hem belläp geçipdik) material nokadyň bu hereketine togtaýan yrgyldyly hereket diýilýär.

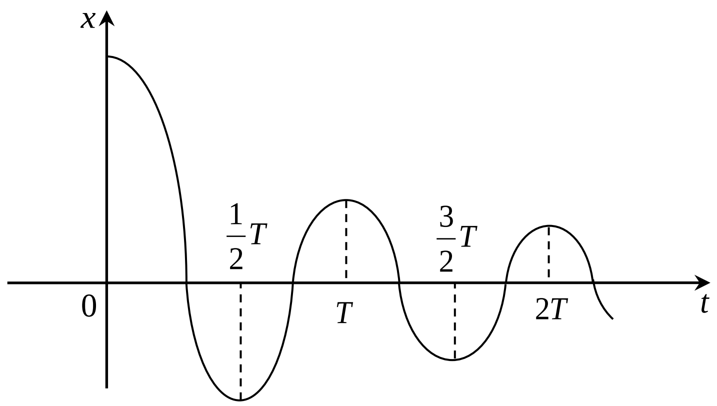
$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

wagt aralygyna *togtaýan yrgyldylaryň periody* diýilýär.

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ ululygyň k-ululykdan kiçidigi sebäpli, $\frac{2\pi}{k_1} > \frac{2\pi}{k}$. Diýmek, togtaýan yrgyldylaryň periody garmoniki yrgyldylaryň periodyndan uly.

$e^{-\frac{n\pi}{k_1}} = e^{-\frac{nT}{2}}$ ululyga togtaýan yrgyldylaryň *dekrementi* diýilýär.

33.4-nji suratda 0,5 dekrementli $(x_0 > 0,\ \upsilon_0 = 0)$ togtaýan yrgyldylaryň grafigi shemalaýyn görkezlen.



33.4.nji surat

Togtaýan yrgyldylaryň (33.13) deňlemesini üýtgedip ýazalyň:

$$x = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha) = e^{-nt} \cdot [a \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos(k_1 t) \cdot \sin\alpha]$$

Ýöne, ýokarda belläp geçişimiz ýaly,

$$a \cdot \cos\alpha = \frac{\upsilon_0 + n \cdot x_0}{k_1} \quad , \quad a \cdot \sin\alpha = x_0$$

Bu ululyklary öňdäki deňlemede ýerine goýup alarys:

$$x = e^{-nt} \cdot \left[\frac{\upsilon_0 + n x_0}{k_1} \cdot \sin(k_1 t) + x_0 \cos(k_1 t) \right] \qquad (33.17)$$

Togtaýan yrgyldylara degişli mysala seredip geçeliň.

Mysal. 1 kg. massaly material nokat *x* okunda, *O* koordinatalar başlangyjyna çekýän, ululygy boýunça koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklyga göni proporsional güýjüň täsiri astynda hereket edýär. Proporsionallyk koeffisiýenti $25\frac{kg}{sek^2}$. Daşky gurşawyň garşylyk güýji nokadyň tizligine göni proporsional. Proporsionallyk koeffisiýenti $6\frac{N \cdot sek}{metr}$. Başlangyç wagt pursatynda $(t = 0)$ material nokat $x = 0{,}8$ metr nokatda bolup, tizligi nola deň. Material nokadyň hereket deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä, $m = 1kg$, $c = 25\frac{kg}{sek^2}$, $\mu = 6\frac{N \cdot sek}{metr}$. Onda:

$$k^2 = \frac{c}{m} = 25\frac{1}{sek^2} \, , \; 2n = \frac{\mu}{m} = 6\frac{1}{sek} \, .$$

Bu ýerden $k = 5\frac{1}{sek}$, $n = 3\frac{1}{sek}$. Diýmek,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 4\frac{1}{sek}$$

Bulardan başga-da, $x_0 = 0{,}8$, $\upsilon_0 = 0$. Bu ululyklary (33.17) deňlikde goýup, nokadyň hereket deňlemesini alarys:

$$x = 2e^{-3t} \cdot [0{,}3 \cdot \sin(4t) + 0{,}4 \cdot \cos(4t)]$$

Bu togtaýan yrgyldylaryň periody $\frac{2\pi}{k_1} = \frac{\pi}{2}$ *sek*-a deň, dekrementi $e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx \frac{1}{10{,}54}$.

Diýmek, her $\frac{\pi}{4}$ sekuntdan soň yrgyldylaryň amplitudasy takmynan $10\frac{1}{2}$ esse azalar. Görşümiz ýaly, yrgyldylar uly tizlik bilen togtaýar.

Bellik. Nokadyň hereketi diňe $k > n$ bolanda öwrenildi, $k < n$ ýa-da $k = n$ bolan ýagdaýda nokadyň hereketi *aperiodiki* bolýar, ýagny nokadyň hereketiniň yrgyldyly häsiýeti bolmaýar.

33.3. Mejbury yrgyldylar.

Goý, *x* okunda hereket edýän *M* material nokada öňki punktda seredilip geçilen $\vec{F}, \vec{R}$ güýçlerden daşary periodiki $F' = H\sin(pt)$ güýç täsir edýän bolsun; *H*, *p* – käbir hemişelik sanlar.

Nokady O merkeze çekýän $\vec{F}$ güýje *dikeldiji* güýç, $\vec{F}'$ güýje *gozgaýjy* güýç diýilýär.

Täsir edýän güýçleri göz öňünde tutup, material nokadyň hereketiniň differensial deňlemesini

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt} + H\sin(pt) \tag{33.18}$$

görnüşde alarys. Bu deňlemäni m-e böleliň. Önki punktda girizilen belgilemeleri ulansak we $\frac{H}{m} = h$ belgilemäni girizsek, (33.18) deňleme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = h\cdot\sin(pt) \tag{33.19}$$

görnüşe geler. Differensial deňlemeler kursundan belli bolşy ýaly, (33.19) deňlemäniň umumy çözüwi $x = x_1 + x_2$ görnüşli. Bu ýerde x_2–(33.19) deňlemäniň hususy çözüwi; x_1-(33.19) deňlemäniň sag bölegi nol bolanda umumy çözüwi, ýagny x_1

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwi. Öňki punktda bu deňlemä seredip geçipdik. Onuň umumy çözüwi

$$x = a\cdot e^{-nt}\cdot\sin(k_1t + \alpha)$$

görnüşli; a, α–islendik hemişelikler; $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. (33.19) deňlemäniň hususy çözüwini $x_2 = b\cdot\sin(pt + \beta)$ görnüşde gözläliň. (33.19) deňlemä girýän önümleri hasaplalyň:

$$\frac{d\,x_2}{dt} = bp\cdot\cos(pt + \beta) \quad , \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -bp^2\cdot\sin(pt + \beta)$$

Bu önümleri (33.19) deňlemede ýerine goýup alarys:

$$-bp^2\cdot\sin(pt + \beta) + 2nbp\cdot\cos(pt + \beta) + k^2b\cdot\sin(pt + \beta) = h\cdot\sin(pt)$$

ýa-da $pt + \beta = \theta$ belgilemäni girizsek,

$$b\cdot(k^2 - p^2)\cdot\sin\theta + 2nbp\cdot\cos\theta = h\cdot\sin(\theta - \beta)\ .$$

Bu ýerden

$$b\cdot(k^2 - p^2)\cdot\sin\theta + 2nbp\cdot\cos\theta = h\cdot\sin\theta\cdot\cos\beta - h\cdot\cos\theta\cdot\sin\beta$$

Alnan deňlik θ–ň islendik bahasynda ýerine ýetmeli. Diýmek, $\sin\theta$ we $\cos\theta$ ululyklaryň koeffisiýentleri deň bolmaly, ýagny

$$h\cdot\cos\beta = b\cdot(k^2 - p^2) \quad , \quad h\cdot\sin\beta = -2nbp$$

Bu deňlemelerden käbir ýönekeý amallardan soň alarys:

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\ , \tag{33.20}$$

$$tg\beta = -\frac{2np}{k^2 - p^2}\ . \tag{33.21}$$

Şeýlelik bilen, seredilýän material nokadyň hereket deňlemesi

$$x = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha) + b \cdot \sin(pt + \beta) \tag{33.22}$$

görnüşlidir; b, β ululyklar (33.20), (33.21) formulalardan tapylýar.

(33.22) deňlemäniň sag bölegindäki goşulyjylaryň birinjisi togtaýan yrgyldylary kesgitleýär, ikinji goşulyjy gozgaýjy güýç bilen şertlenen p ýygylykly, $\frac{2\pi}{p}$ periodly garmoniki hereketi kesgitleýär. Bu yrgyldylara *mejbury yrgyldylar* diýilýär.

Öň belläp geçişimiz ýaly, togtaýan yrgyldylaryň amplitudasy nola ymtylýar. Diýmek, wagtyň geçmegi bilen bu yrgyldylar göz öňünde tutulmasa hem bolýar. Şeýlelik bilen, wagtyň geçmegi bilen M nokadyň hereketi

$$x = b \cdot \sin(pt + \beta) \tag{33.23}$$

deňleme boýunça bolup geçýär.

(33.23) deňleme M nokadyň $\vec{F}$ dikeldiji, $\vec{R}$ garşylyk, $\vec{F}'$ gozgaýjy güýçleriň täsirinde, şeýle-de, $n = \frac{\mu}{2n} < k$ deňsizlik ýerine ýetende mejbury yrgyldyly hereketiniň deňlemesi bolup durýar.

Garşylygyň mejbury yrgyldylaryň b amplitudasyna täsirini giňişleýin öwreneliň. (33.20) deňlikden görşümiz ýaly, *togtamak koeffisiýenti* diýlip atlandyrylýan $n = \frac{\mu}{2n}$ ululygyň ulalmagy bilen b amplituda kiçelýär. Garşylyk bolmadyk ýagdaýynda $(n = 0)$ amplituda

$$b = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|} \tag{33.24}$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

Gozgaýjy güýjüň p ýygylygy üýtgände amplitudanyň üýtgeýşini öwreneliň.

$$f(p) = \left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2$$

funksiýa minimum baha eýe bolanda amplituda maksimum baha eýe bolar.

Bu funksiýanyň önümi $f'(p) = 4p \cdot \left[p^2 - \left(k^2 - 2n^2\right)\right]; p \geq 0$ bolandygy sebäpli:

$$p < \sqrt{k^2 - 2n^2} \text{ bolsa } f'(p) < 0 \;;$$

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} \text{ bolsa } f'(p) = 0 \;;$$

$$p > \sqrt{k^2 - 2n^2} \text{ bolsa } f'(p) > 0 \;;$$

Diýmek, $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ bolanda $f(p)$ funksiýa minimum baha eýe bolar, b amplituda bolsa maksimum bolar.

Gozgaýjy güýjüň $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ ýygylygyna *kritiki ýygylyk* diýilýär.

$f(p)$ funksiýanyň önüminiň aňlatmasyndan görşümiz ýaly, $n \geq \frac{\sqrt{2}k}{2}$ bolanda $f'(p) \geq 0$, ýagny $f(p)$ artýan funksiýa bolýar, diýmek, n berlen bolanda p-niň artmagy bilen $f(p)$ funksiýanyň bahalary k^4–den ∞–e çenli monoton (birsydyrgyn) artýar. Yrgyldylaryň amplitudasy bolsa $b_0 = \dfrac{h}{k^2}$ bahadan nola çenli monoton kemelýar.

Kritiki ýygylygy (33.20) formulada goýup, amplitudanyň maksimumyny kesgitläris:

$$b_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} \tag{33.25}$$

Bellik. Gozgaýjy güýjüň *p* ýygylygynyň garmoniki yrgyldylaryň *k* ýygylygyna ýakyn bolmagy mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň uly möçberde artmagyna getirýär. Bu hadysa *rezonans hadysasy* diýilýär.

Mejbury yrgyldylara degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Massasy $m = 2\,kg$ bolan material nokat gatylygy $c = 39{,}2\dfrac{N}{sm}$ bolan pružinden asylan. Material nokada $s = 117{,}6 \cdot \sin(pt + \beta)(N)$ gozgaýjy güýç we $R = 0{,}49\sqrt{m \cdot c} \cdot \upsilon(N)$ garşylyk güýji täsir edýär. Mejbury yrgyldylaryň amplitudasynyň iň uly bahasyny kesgitlemeli. *p* ýygylygyň haýsy bahasynda amplituda iň uly baha eýe bolýar?

Çözülişi. $b_{\max}$ -y (33.25) formuladan taparys. Ilki bilen bu formula girýän n, k, h ululyklary kesgitläliň.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{39{,}2\dfrac{N}{sm}}{2\,kg}} = \sqrt{19{,}6 \cdot 100}\,\frac{1}{sek} = 44{,}27\frac{1}{sek}\ ,$$

$$2n = \frac{\mu}{m} = \frac{0{,}49\sqrt{m \cdot c}}{m} = 0{,}49\sqrt{\frac{c}{m}} = 0{,}49 \cdot k = 21{,}69\frac{1}{sek}\ .$$

Onda

$$n = 10{,}845\frac{1}{sek}\ ,$$

$$h = \frac{117{,}6\,N}{m} = \frac{117{,}6\,N}{2\,kg} = 58{,}8\frac{m}{sek^2}\ .$$

Tapylan ululyklary (33.25) formulada ýerine goýup alarys:

$$b_{\max} = \frac{58{,}8\dfrac{m}{sek^2}}{21{,}69\dfrac{1}{sek} \cdot \sqrt{44{,}27^2 - 10{,}845^2}\,\dfrac{1}{sek}} = 0{,}0063\ m\,.$$

Kritiki ýygylygy $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ formuladan taparys:

$$p_{kr} = \sqrt{44{,}27^2 - 2 \cdot 10{,}845^2}\,\frac{1}{sek} = 41{,}5\frac{1}{sek}$$

§34. Material nokadyň görälik hereketi.

1. **Material nokadyň görälik hereketiniň differensial deňlemesi.**
2. **Käbir hususy ýagdaýlar.**
3. **Görälik hereketde material nokadyň kinetik energiýasy hakynda teorema.**

34.1. Material nokadyň görälik hereketiniň differensial deňlemesi.

Goý, M material nokat $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereket edip, bu koordinatalar sistemasy gozganmaýan $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä hereket edýän bolsun. Nokada täsir edýän güýçleriň esasynda nokadyň $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereketiniň deňlemesini kesgitlemekligi maksat edineliň. Munuň üçin ilki bilen material nokadyň görälik hereketiniň differensial deňlemesini düzmeli. Alnan deňlemäni integrirläp, material nokadyň görälik hereketini kesgitläp bolar.

Material nokadyň gozganmaýan koordinatalar sistemasyna (inersial hasaplanyş sistemasy) görä hereketi üçin dinamikanyň ikinji kanunyny ýazalyň:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \ , \tag{34.1}$$

bu ýerde $\vec{a}$–material nokadyň tizlenmesi; $\vec{F}$–nokada goýlan güýç; $\vec{N}$– baglanyşygyň reaksiýasy. Emma kinematikadan belli bolşy ýaly, $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$. $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_k$–$M$ nokadyň degişlilikde görälik, göçürme we koriolis tizlenmeleri.

Tizlenmäni (34.1) deňlemede goýup alarys:

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} - m \cdot \vec{a}_e - m \cdot \vec{a}_k \tag{34.2}$$

Nokadyň göçürme tizlenmesine garşylykly ugrukdyrylan $-m \cdot \vec{a}_e$ wektora *göçürme inersiýa güýji* diýilýär. Şuňa meňzeşlikde $-m \cdot \vec{a}_k$ wektora *koriolis inersiýa güyji* diýilýär.

Eger $-m \cdot \vec{a}_e = \vec{F}_e^{in}$ we $-m \cdot \vec{a}_k = \vec{F}_k^{in}$ belgilemeleri girizsek, onda (34.2) deňlik

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_k^{in} \tag{34.3}$$

görnüşe geler. Alnan (34.3) deňleme material nokadyň görälik hereketiniň wektor deňlemesidir. Bu deňlemäni hereketlenýän $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynyň oklaryna proýektirlesek we

$$a_{r\,x_1} = \frac{d^2x_1}{dt^2} \ , \quad a_{r\,y_1} = \frac{d^2y_1}{dt^2} \ , \quad a_{r\,z_1} = \frac{d^2z_1}{dt^2}$$

deňlikleri göz öňünde tutsak, onda nokadyň görälik hereketiniň differensial deňlemelerini alarys:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_{x_1} + N_{x_1} + F_{e\,x_1}^{in} + F_{k\,x_1}^{in} \ , \\ m\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = F_{y_1} + N_{y_1} + F_{e\,y_1}^{in} + F_{k\,y_1}^{in} \ , \\ m\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = F_{z_1} + N_{z_1} + F_{e\,z_1}^{in} + F_{k\,z_1}^{in} \ . \end{cases} \tag{34.4}$$

Bu ýerden şu netijä geleris:

Material nokadyň hereketlenýän hasaplanyş sistemasyna görä hereketi nokada goýlan we reaksiýa güýçlerinden daşary, göçürme we koriolis inersiýa güýçleri täsir eden ýagdaýynda gozganmaýan hasaplanyş sistemasyna görä ýaly bolup geçýär.

34.2. Käbir hususy ýagdaýlar.

Material nokadyň göräli hereketiniň käbir hususy ýagdaýlaryna seredip geçeliň.

1) Goý, hereketlenýän koordinatalar sistemasynyň hereketi öňe bolan hereket bolsun. Bu ýagdaýda $a_k = 0$. Diýmek, $F_k^{in} = 0$. Şol sebäpli (34.3) deňlemeden

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} \qquad (34.5)$$

deňlemäni alarys. Degişlilikde (34.4) deňlemede koriolis tizlenmesiniň düzüjileri hem bolmaz.

2) Goý, hereketlenýän koordinatalar sistemasynyň hereketi göňüçyzykly, deňölçegli öňe bolan hereket bolsun. Bu ýagdaýda $a_k = a_e = 0$ bolar, diýmek, $F_k^{in} = F_e^{in} = 0$. Onda (34.3) deňleme

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{N} \qquad (34.6)$$

görnüşe geler.

Netije. (34.6) deňlemeden görnüşi ýaly, dinamikanyň ikinji kanunynyň gönüçyzykly deňölçegli öňe bolan hereketdäki koordinatalar sistemasyna görä görnüşi edil gozganmaýan koordinatalar sistemasyndaky ýalydyr, ýagny bu koordinatalar sistemasy inersial hasaplanyş sistemasydyr. Bu ýerden göňüçyzykly, deňölçegli öňe bolan hereketdäki hasaplanyş sistemasyna görä bolup geçýän mehaniki hadysalaryň gozganmaýan hasaplanyş sistemasyna görä ýaly bolup geçýändigi gelip çykýar. Bu getirilen netije Galileý tarapyndan ykrar edilýär we *klassyky mehanikanyň göräli prinsipi* diýlip atlandyrylýar.

Material nokadyň göräli deňagramlykda bolan ýagdaýyna hem seredip geçeliň.

Goý, goýlan güýçleriň täsirinde material nokat $O_1x_1y_1z_1$ hasaplanyş sistemasyna görä dynçlykda bolsun. Elbetde, bu ýagdaýda $\upsilon_r = 0, a_r = 0$ we $a_k = 0$, $F_k^{in} = 0$ bolar. Diýmek, (34.3) deňleme

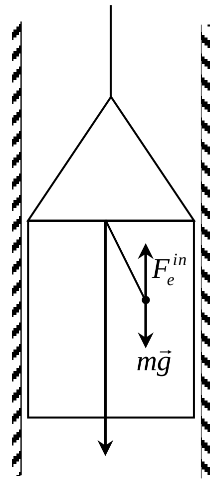
$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_e^{in} = \vec{0} \qquad (34.7)$$

görnüşe eýe bolar, ýagny material nokat göräli dynçlykda bolanda nokada goýlan güýç, reaksiýa güýji we göçürme inersiýa güýji deňagramlaşýarlar.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. $a = const \; (a < g)$ tizlenmeli aşak hereket edýän liftiň kabinasynda matematiki maýatnik asylan. Maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň periodyny kesgitlemeli.

Çözülişi.



34.1-nji surat

Material nokadyň görälik hereketini kesgitlemek üçin nokada ululygy boýunça $m \cdot a$ deň, wertikal ýokary ugrukdyrylan F_e^{in} göçürme inersiýa güýjüni goýalyň. m-maýatnigiň massasy. Maýatnigiň lifte görä hereketi, maýatnigiň asma nokady gozganmaýan bolan ýagdaýda $m(g-a)$ ululykly wertikal aşak ugrukdyrylan güýjüň täsirindäki hereketi ýaly bolup geçýär. Diýmek, fizikadan belli, yrgyldylaryň periodyny kesgitleniş formulasyndan erkin gaçmanyň tizlenmesi bolan g ulylygy $(g-a)$ ululyk bilen çalşyrsak maýatnigiň yrgyldysynyň periodyny taparys ýagny

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} \; ,$$

bu ýerde l–maýatnigiň uzynlygy. Eger lift a tizlenmeli ýokary hereket edýän bolsa, onda, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ bolar.

Eger lift erkin gaçýan bolsa $(a = g)$, onda $m\vec{g}$ we $\vec{F}_e^{in}$ güýçler deňagramlaşýarlar. Wertikaldan belli bir burça galdyrylan maýatnik şol ýagdaýynda galar. Liftde duran gözegçi üçin daşky jisimler agramsyz ýaly bolup görner.

34.3. Görälik hereketde material nokadyň kinetik energiýasy hakynda teorema.

Ýokarda belläp geçişimiz ýaly, material nokadyň görälik hereketiniň (34.3) deňlemesi gozganmaýan koordinatalar sistemasyna görädäki hereket deňlemesine meňzeş. Bu deňlemeleriň tapawudy, görälik hereketiniň deňlemesine goýlan we reaksiýa güýçlerinden daşary $\vec{F}_e^{in}$ göçürme inersiýa hem-de $\vec{F}_k^{in}$ koriolis inersiýa güýçleri girýär. Başga tarapdan, material nokadyň dinamikasyna degişli teoremalar (hereket mukdary hakynda, hereket mukdarynyň momenti hakynda, kinetik energiýanyň üýtgemegi hakynda) gönüden-göni dinamikanyň ikinji kanunyndan gelip çykýarlar. Bu ýerden ýokarda agzalan teoremalary material nokadyň görälik hereketi üçin hem ulanyp boljakdygy gelip çykýar. Ýöne bu teoremalar material nokadyň görälik hereketi üçin ulanylanda, göçürme we koriolis inersiýa güýçlerini göz öňünde tutmaly. Hususy ýagdaýda, nokadyň görälik hereketi üçin kinetik energiýanyň üýtgemegi hakyndaky teoremanyň ulanylyşynyň üstünde durup geçeliň.

Material nokadyň kinetik energiýasynyň deňlemesi düzülende, göçürme inersiýa we koriolis inersiýa güýçleriniň nokadyň görälik orunüýtgemesindäki işlerini göz öňünde tutmaly. Emma $\vec{a}_k$ koriolis tizlenmesiniň nokadyň görälik tizligine perpendikulýardygy sebäpli, koriolis inersiýa güýjüniň işi nola deň. Diýmek, görälik hereketde material nokadyň kinetik energiýasynyň deňlemesi aşakdaky görnüşdedir:

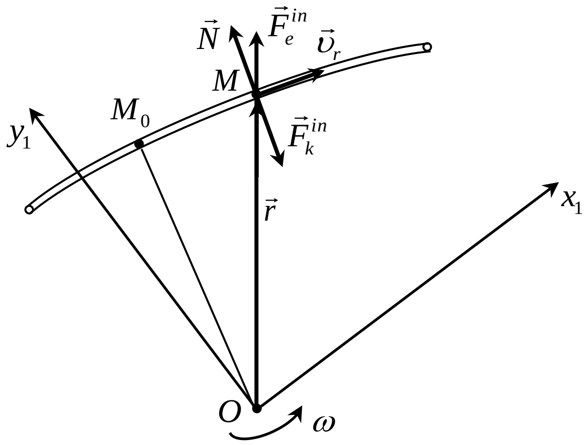
$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \left(F_{x_1} + F_{e\,x_1}^{in}\right)dx_1 + \left(F_{y_1} + F_{e\,y_1}^{in}\right)dy_1 + \left(F_{z_1} + F_{e\,z_1}^{in}\right)dz_1 \qquad (34.8)$$

Bu deňlemäniň sag bölegi $\vec{F}$ we $\vec{F}^{in}$ güýçleriň elementar işlerini görkezýär.

Bir mysala seredeliň

Mysal. Egriçyzykly ýylmanak turbajyk gorizonal tekizlikde *O* nokadyň daşynda $\omega = const$ burç tizlik bilen aýlanýar. Turbajygyň içindäki şarjagazyň massasy *m*. Başlangyç pursatda $(t = 0)$ şarjagaz M_0 nokatda bolup, başlangyç görälik tizligi nola deň. Şarjagazyň υ_r görälik tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi.



34.2-nji surat

Göçürme hereketi deňölçegli aýlanma hereket bolýandygy üçin göçurme inersiýa güýji diňe normal inersiýa güýjünden ybarat, $F_e^{in} = m \cdot \omega^2 \cdot r$, bu ýerde *r*-şarjagazyň radius-wektorynyň uzynlygy.

Koriolis inersiýa güýji ululygy boýunça $2m \cdot \omega \cdot \upsilon_r$-e deň $\left(F_k^{in} = 2m \cdot \omega \cdot \upsilon_r\right)$, ugry boýunça şarjagazyň görälik tizligine perpendikulýar. Turbajygyň $\vec{N}$ reaksiýasy turbajygyň *M* nokatdaky normaly boýunça ugrukdyrylan.

Goýlan meseläni çozmek üçin nokadyň kinetik energiýasy hakyndaky teoremany ulanalyň. $\vec{F}_k^{in}$ we $\vec{N}$ güýçler şarjagazyň görälik tizligine perpendikulýardyklary sebäpli, bu güýçleriň şarjagazyň görälik hereketinde işleri nola deň.

$\vec{F}_e^{in}$ güýjüň M_0M aralykdaky işini hasaplalyň. $\vec{F}_e^{in}$ güýjüň hereketlenýän koordinatalar oklaryna proýeksiýalaryny ulanyp taparys:

$$dA = F_{e\,x_1}^{in}dx_1 + F_{e\,y_1}^{in}dy_1 = m \cdot \omega^2 \cdot \left(x_1dx_1 + y_1dy_1\right) = \frac{m \cdot \omega^2}{2}d\left(x_1^2 + y_1^2\right) = \frac{m \cdot \omega^2}{2}d\left(r^2\right)$$

Bu ýerden integrirläp göçürme güýjüniň işini taparys:

$$A = \frac{m \cdot \omega^2}{2}\int_{r_0}^{r} d\left(\rho^2\right) = \frac{m \cdot \omega^2}{2}\left(r^2 - r_0^2\right)$$

Şarjagazyň başlangyç görälik tizliginiň nola deňdigi sebäpli, kinetik energiýanyň deňlemesi $\frac{m \cdot \upsilon_r^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2}{2}\left(r^2 - r_0^2\right)$ görnüşde bolar, bu ýerden $\upsilon_r = \omega\sqrt{r^2 - r_0^2}$.

Şunuň bilen, material nokadyň dinamikasyny tamamlaýarys. Indiki paragrafdan başlap mehaniki sistemanyň dinamikasyny öwrenmäge girişeris.