4-nji BÖLÜM
Analitiki mehanika.

12-nji BAP
Analitiki mehanikanyň esaslary.
§49. Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi.

1. **Umumylaşdyrylan koordinatalar.**
2. **Mümkin bolan orunüýtgetme düşünjesi.**
3. **Ideal baglanyşyklar.**
4. **Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi. Statikanyň umumy deňlemesi.**

49.1. Umumylaşdyrylan koordinatalar.

Mehaniki sistemanyň dinamikasyna girişilende belläp geçişimiz ýaly, n sany material nokatdan ybarat bolan mehaniki sistema goýlan baglanyşyklar S sany

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ , \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_S(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ . \end{cases} \tag{49.1}$$

deňleme bilen häsiýetlendirilýär. Eger f_i funksiýalaryň argumentleriniň toplumyna t wagt girmeýän bolsa, onda bu baglanyşyklara stasionar baglanyşyklar diýilýär. (49.1) deňlemeler sistemasy stasionar baglanyşyklaryň deňlemeler sistemasydyr. Eger f_i funksiýalaryň argumentleriniň toplumyna t wagt girýän bolsa, onda bu baglanyşyklara stasionar däl baglanyşyklar diýilýär. Stasionar däl baglanyşyklaryň deňlemeleri

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ , \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_S(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ . \end{cases} \tag{49.2}$$

görnüşlidir.

Bellik. Baglanyşyklary (49.2) deňlemeler sistemasy bilen berilýän mehaniki sistema **golonom sistema** hem diýilýär.

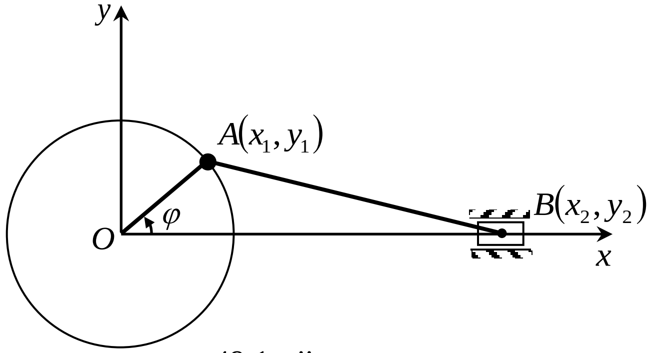
Mundan beýläk diňe stasionar baglanyşyklar göz öňünde tutuljakdyr.

n sany material nokatdan ybarat bolan, (49.1) deňlemeler sistemasy bilen berlen baglanyşykly mehaniki sistema seredeliň. Elbetde, bu baglanyşyklar mehaniki sistemanyň nokatlarynyň ýerleşişine käbir çäklendirmeler goýýar. Mehanika nukdaý nazaryndan seredenimizde, mehaniki sistemanyň nokatlarynyň $3n$ sany koordinatasy biri-birine baglanyşyksyz üýtgäp bilmeýärler. Sebäbi S sany baglanyşyk deňlemesinden erkin S sanysyny (meselem, $x_1, x_2, ..., x_S$) galan $3n$-S sanysyndan aňladyp bolýar. Şeýlelik bilen, diňe $3n$-S sany koordinatalary erkin hasaplap bolýar.

Berlen mehaniki sistemanyň ýerleşişi kesgitlenende **umumylaşdyrylan koordinatalardan** peýdalanmak amatly bolýar.

Mehaniki sistemanyň giňişlikde ýerleşişini doly kesgitleýän, biri-birine bagly däl parametrlere mehaniki sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatalary diýilýär.

Umumylaşdyrylan koordinatalaryň sanyna mehaniki sistemanyň **erkinlik derejesi** diýilýär. Mysal üçin kriwoşip-şatun mehanizmine seredeliň; $OA = r$, $AB = l$.

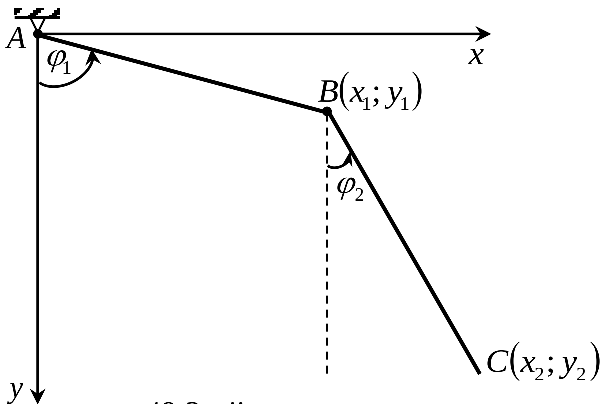


49.1-nji surat

Bu mehanizmiň ýerleşişi φ burç bilen doly kesgitlenýär. 49.1-nji suratdan görnüşi ýaly, *A*,*B* nokatlaryň koordinatalary φ burçuň üsti bilen şeýle aňladylýar:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \ , \\ y_1 = r\sin\varphi \ , \\ x_2 = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} \ , \\ y_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Görnüşi ýaly, kriwoşip-şatun mehanizminiň erkinlik derejesi bire deň. Ikinji mysal hökmünde özara silindrik şarnir bilen birikdirilen *AB* we *BC* sterženlerden ybarat sistema seredeliň; $AB = l_1$, $BC = l_2$.



49.2-nji surat

B,*C* nokatlaryň koordinatalary φ_1, φ_2 burçlar bilen kesgitlenýär, ýagny

$$\begin{cases} x_1 = l_1\sin\varphi_1 ; \\ y_1 = l_1\cos\varphi_1 ; \\ x_2 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 ; \\ y_2 = l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2 \ . \end{cases}$$

Görnüşi ýaly, seredilýän mehanizmiň erkinlik derejesi ikä deň.

49.2. Mümkin bolan orunüýtgetme düşünjesi.

Mehanikanyň taglymatlarynyň biri bolan “*Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi*” bilen tanyşmaga girişeliň.

Hereketi baglanyşyklar bilen çäklendirilen mehaniki sistemanyň nokatlarynyň orunüýtgetmeleri erkin bolup bilmeýär. Meselem, süýnmeýän l uzynlykly ýüp bilen özara birikdirilen material nokatlaryň arasyndaky uzaklyk l-den uly bolup bilenok. l-den uly boljak bolsa, ýüp üzülmeli, ýagny baglanyşyk bozulmaly bolýar.

Mehaniki sistemanyň mümkin bolan orunüýtgetme düşünjesini girizeliň.

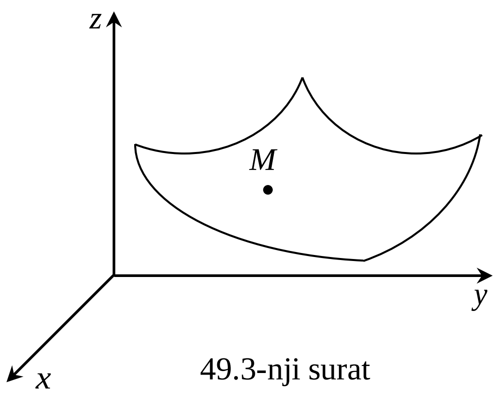
Berlen wagt pursatynda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň baglanyşyklar tarapyndan çäklendirilmedik elementar orunüýtgemesine **mehaniki sistemanyň mümkin bolan orunüýtgetmesi** diýilýär.

Ilki bilen

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (49.3)$$

deňleme bilen berlen üstde ýerleşýän material nokadyň mümkin bolan orunüýtgetmesini öwreneliň.

(49.3) deňlemeden görnüşi ýaly, koordinatalaryň ikisi (meselem, x,y) erkin baha eye bolup bilerler, üçünji koordinata erkin koordinatalara bagly bolup durýar. Diýmek, bu nokadyň erkinlik derejesi ikä deň.



49.3-nji surat

Goý, material nokat $M(x, y, z)$ nokatdan ýakyn $M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ nokada ornuny üýtgeden bolsun. Elbetde, M' nokadyň koordinatalary hem (49.3) deňlemäni kanagatlandyrmaly, ýagny

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = 0$$

deňlik ýerine ýetmeli. Bu deňligiň çep bölegini Teýloryň hataryna dargydyp, ikinji we ýokary tertipli kiçilikleri aýryp alarys:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (49.4)$$

Emma $M(x, y, z)$ nokat (49.3) deňlemeli üstde ýerleşýändigi sebäpli, $f(x, y, z) = 0$. Onda (49.4) deňlikden şeýle deňligi alarys:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (49.5)$$

(49.5) deňligiň çep bölegindäki $\delta x, \delta y, \delta z$ ululyklara nokadyň koordinatalarynyň wariasiýalary diýilýär. $\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ wektor material nokadyň mümkin bolan orunüýtgetmesini kesgitleýär.

Belli bolşy ýaly, $\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ wektor (49.3) deňlemeli üste perpendikulýar. (49.5) deňleme $\vec{n}$ we $\delta\vec{r}$ wektorlaryň perpendikulýardyklaryny $\left((\vec{n},\delta\vec{r})=0\right)$ görkezýär. Bu bolsa material nokadyň mümkin bolan orunüýtgetmesiniň nokadyň şu pursatda ýerleşýän ýerinde üste geçirilen galtaşma tekizliginde bolup geçýändigini aňladýar.

Bellik. (49.5) deňligi kanagatlandyrýan islendik $(\delta x,\delta y,\delta z)$ toplum nokadyň mümkin bolan orunüýtgetmesini kesgitleýär.

Indi n sany material nokatdan ybarat S sany baglanyşykly mehaniki sistema seredeliň. Goý, sistema goýlan baglanyşyklar

$$\begin{cases} f_1(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0\ , \\ f_2(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_S(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\ldots,x_n,y_n,z_n)=0\ . \end{cases}$$

deňlemeler bilen berlen bolsun. $\delta\vec{r}_i=(\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i)$, $(i=\overline{1,n})$–"i" nokadyň mümkin bolan orunüýtgetmesini kesgitleýän wektor.

Ýokardaka meňzeşlikde $\delta\vec{r}_i$ wektorlaryň koordinatalary aşakdaky deňlemeleri kanagatlandyrmaly,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\delta z_2+\ldots+ \\ +\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n=0\ , \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\delta z_2+\ldots+ \\ +\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial f_2}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n=0\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_S}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_S}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f_S}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f_S}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_S}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f_S}{\partial z_2}\delta z_2+\ldots+ \\ +\frac{\partial f_S}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial f_S}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial f_S}{\partial z_n}\delta z_n=0\ . \end{cases} \tag{49.6}$$

Şeýlelik bilen, koordinatalary (49.6) deňlemeleri kanagatlandyrýan $\delta\vec{r}_i$ $(i=\overline{1,n})$ wektorlar toplumy mehaniki sistemanyň mümkin bolan orunüýtgetmesini kesgitleýär.

Goý, mehaniki sistemanyň ýerleşişi $q_1,q_2,\ldots,q_k$ umumylaşdyrylan koordinatalar bilen kesgitlenýän bolsun. Elbetde, sistemanyň nokatlarynyň dekart koordinatalary umumylaşdyrylan koordinatalara bagly, ýagny:

$$\begin{cases} x_i=x_i(q_1,q_2,\ldots,q_k)\ , \\ y_i=y_i(q_1,q_2,\ldots,q_k) \quad i=\overline{1,n}\ , \\ z_i=z_i(q_1,q_2,\ldots,q_k)\ . \end{cases} \tag{49.7}$$

Şeýle-de, dekart koordinatalaryň wariasiýalary bilen umumylaşdyrylan koordinatalaryň wariasiýalarynyň arasynda şeýle baglanyşyk bar:

$$\begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \ , \\ \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad i = \overline{1,n} \ , \\ \delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \ . \end{cases} \tag{49.8}$$

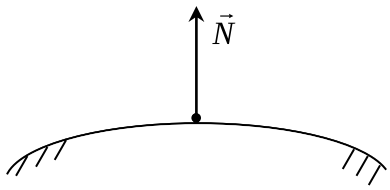
49.3. Ideal baglanyşyklar.

Bu bölümçede ideal baglanyşyklar diýlip atlandyrylýan baglanyşyklar bilen tanyşalyň.

Eger mehaniki sistemanyň islendik mümkin bolan orunüýtgetmesinde baglanyşyklaryň reaksiýa güýçleriniň elementar işleriniň jemi nola deň bolsa, onda bu baglanyşyklara **ideal baglanyşyklar** diýilýär.

Sürtülmesiz bolan geometrik baglanyşyklar ideal baglanyşyklardyr. Sürtülmesiz geometrik baglanyşylaryň käbirlerine seredip geçeliň.

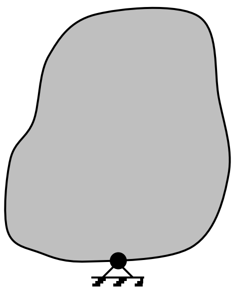
1) Ýylmanak üstde ýerleşýän material nokat.



49.4-nji surat

Belli bolşy ýaly, ýylmanak üstüň $\vec{N}$ reaksiýasy üste perpendikulýar. Nokadyň mümkin bolan $\delta\vec{r}$ orunüýtgetmesi bolsa galtaşma tekizliginde ýatýar. Diýmek, $\left(\vec{N}, \delta\vec{r}\right) = 0$, ýagny reaksiýa güýjüniň elementar işi nola deň.

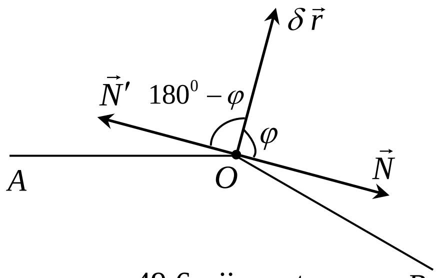
2) Gozganmaýan nokady bar bolan gaty jisim.



49.5-nji surat

Bu ýagdaýda reaksiýa güýji gozganmaýan nokada täsir edýär. Diýmek, bu güýjüň işi nola deň.

3) Özara şarnirli birikdirilen gaty jisimler (meselem, *OA* we *OB* sterženler).



49.6-nji surat

Dinamikanyň III kanuny boýunça $\vec{N}=-\vec{N}'$. Bu yerde $\vec{N},\vec{N}'$ sterženleriň özara täsir güýçleri. O nokada $\delta\vec{r}$ mümkin bolan orunüýtgetme bereliň. Onda $\vec{N},\vec{N}'$ güýçleriň elementar işleri degişlilikde $N\cdot\delta r\cos\varphi$ we $N'\cdot\delta r\cos\left(180^0-\varphi\right)=$ $=-N'\delta r\cos\varphi$ deň.

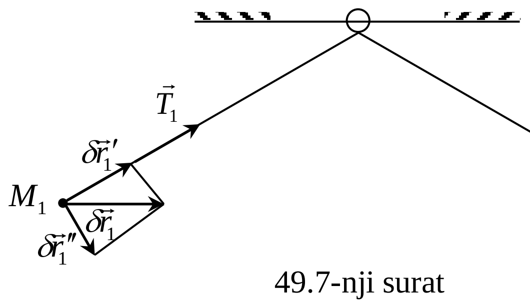
Elementar işleriň jemi:

$$N\cdot\delta r\cos\varphi-N'\cdot\delta r\cos\varphi=\left(N-N'\right)\cdot\delta r\cos\varphi=0$$

4) Erkin gaty jisim. Gaty jisimiň üýtgemeýän sistemadygy sebäpli içki güýçleriniň elementar işleriniň jemi nola deň (§40).

5) Süýnmeýän ýüp bilen amala aşyrylýan baglanyşyk.

Goý, M_1,M_2 material nokatlar ýylmanak halkadan geçirilen süýnmeýän ýüp bilen birikdirilen bolsun.



49.7-nji surat

M_1,M_2 nokatlara goýlan $\vec{T}_1,\vec{T}_2$ dartyş güýçler özara deň, $T_1=T_2$.

M_1,M_2 nokatlaryň orunüýtgetmelerini degişlilikde $\delta\vec{r}_1,\delta\vec{r}_2$ bilen belgiläp, bu orunüýgemeleri ýüpüň ugry we ýüpe perpendikulýar ugur boýunça düzüjilere dargadalyň. $\delta\vec{r}_1-M_1$ nokadyň orunüýtgetmesi, $\delta\vec{r}_2-M_2$ nokadyň orunüýtgetmesi.

$$\delta\vec{r}_1=\delta\vec{r}_1'+\delta\vec{r}_1'' \qquad , \qquad \delta\vec{r}_2=\delta\vec{r}_2'+\delta\vec{r}_2''$$

Ýüpüň süýnmeýändigi sebäpli,$\left|\delta\vec{r}_1'\right|=\left|\delta\vec{r}_2'\right|$. $\vec{T}_1,\vec{T}_2$ güýçleriň elementar işleriniň jemi: $T_1\cdot\delta r_1'-T_2\cdot\delta r_2'=0$.

49.4. Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi. Statikanyň umumy deňlemesi.

Statikanyň meselelerini çözmekligiň umumy usulyny berýän **mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi** şundan ybarat:

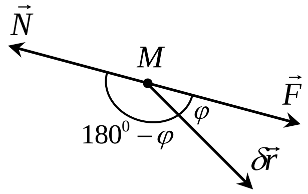
Ideal baglanyşykly mehaniki sistemanyň berlen pursatda deňagramlykda bolmaklygy üçin mehaniki sistemanyň islendik mümkin bolan orunüýtgetmesinde goýlan güýçleriň elementar işleriniň jeminiň nola deň bolmaklygy zerur we ýeterlikdir.

Subudy.

Zerurlygy. Goý, berlen pursatda mehaniki sistema deňagramlykda bolsun. Mehaniki sistemanyň *M* erkin nokadyna seredeliň. Şertli belgilemeleri girizeliň:

$\vec{F}$ –M nokada täsir edýän goýlan güýç;
$\vec{N}$ –M nokada täsir edýän reaksiýa güýji.
M nokadyň deňagramlykdalygy sebäpli, $\vec{F}+\vec{N}=\vec{0}$.

Mehaniki sistema käbir orunüýtgetme bereliň. Şeýlelikde, M nokat $\delta\vec{r}$ orunüýtgetme alar.



49.8-nji surat

$\varphi-\vec{F}$ we $\delta\vec{r}$ wektorlaryň arasyndaky burç. $\vec{F},\vec{N}$ güýçleriň elementar işlerini degişlilikde $\delta A_F, \delta A_N$ bilen belgiläp taparys:

$$\delta A_F=\left(\vec{F},\delta\vec{r}\right)=F\cdot\delta r\cos\varphi\ ,$$
$$\delta A_N=\left(N,\delta\vec{r}\right)=N\cdot\delta r\cos\left(180^0-\varphi\right)=-N\cdot\delta r\cos\varphi.$$

Bu ýerden

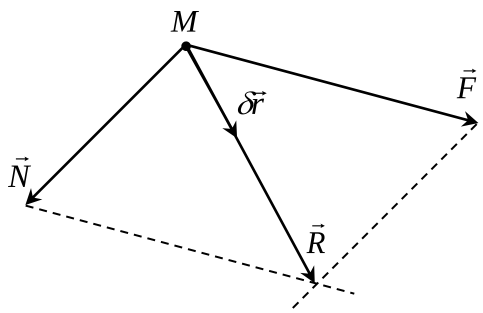
$$\delta A_F+\delta A_N=F\cdot\delta r\cos\varphi+N\cdot\delta r\cos\left(180^0-\varphi\right)=\left(F-N\right)\cdot\delta r\cos\varphi=0$$

Şeýlelik bilen, $\delta A_F+\delta A_N=0$. M nokadyň erkinligi sebäpli, alnan deňlik mehaniki sistemanyň ähli nokatlary üçin hem ýerine ýetmeli, diýmek,

$$\sum\delta A_F+\sum\delta A_N=0$$

Seredilýän mehaniki sistema ideal baglanyşyklydygy sebäpli, $\sum\delta A_N=0$. Onda ýokarky deňlemeden $\sum\delta A_F=0$ bolýandygyny alarys. Ýagny sistema goýlan güýçleriň elementar işleriniň jemi nola deň.

Ýeterlikligi. Goý, berlen pursatda mehaniki sistemanyň islendik mümkin bolan orunüýtgetmesinde goýlan güýçleriň elementar işleriniň jemi nola deň bolsun, ýagny $\sum\delta A_F=0$ bolsun. Eger sistemanyň nokatlarynyň tizlikleri şu pursatda nola deň bolsa, onda mehaniki sistemanyň herekete girmejekdigini subut edeliň. Muny subut etmek üçin tersinden gaýdalyň. Goý, sistema deňagramlyk ýagdaýyndan herekete girýän bolsun. Mehaniki sistemanyň erkin M nokadyna täsir edýän goýlan $\vec{F}$ we $\vec{N}$ reaksiýa güýçleriniň deňtäsiredijisi $\vec{R}$ güýjüň täsirinde M nokat käbir $\delta\vec{r}$ orunüýtgetme alar. Berlen pursatda M nokadyň tizliginiň nola deňdigi sebäpli $\vec{R}$ we $\delta\vec{r}$ wektorlar ugurdaşdyrlar.



49.9-nji surat

Diýmek, deňtäsiredijiniň işi hakyndaky teoremadan $\delta A_F + \delta A_N = \delta A_R = R \cdot \delta r > 0$ deňsizligi alarys. Alnan deňsizligi mehaniki sistemanyň ähli nokatlary üçin ýazyp, özara goşup taparys:

$$\sum \delta A_F + \sum \delta A_N > 0$$

Emma $\sum \delta A_N = 0$ (ideal baglanyşyk). Onda $\sum \delta A_F > 0$. Bu bolsa $\sum \delta A_F = 0$ şerte garşy gelýär. Şeýlelik bilen, $\sum \delta A_F = 0$ şertde mehaniki sistema herekete girip bilmeýär.

Zerurlyk we ýeterlik şertler subut edildi.

Elementar işin analitiki görnüşinden peýdalanyp, mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipini

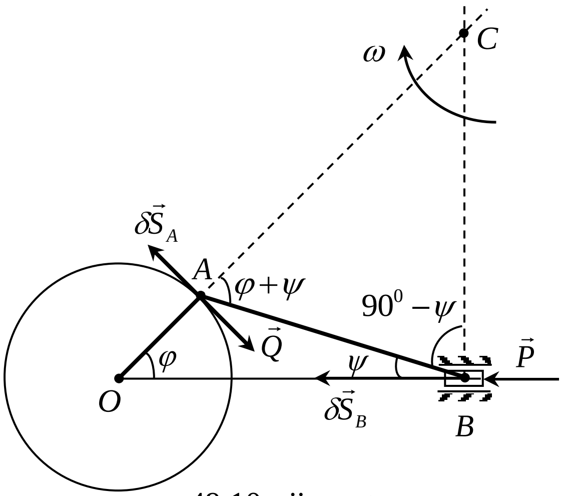
$$\sum \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i \right) = 0 \qquad (49.9)$$

görnüşde ýazyp bileris, bu ýerde F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}-sistemanyň "i "nokadyna goýlan $\vec{F}_i$ güýjüň düzüjileri, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$-"$i$ " nokadyň koordinatalarynyň wariasiýalary. (49.9) deňlemä **statikanyň umumy deňlemesi** diýilýär.

Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipiniň ulanylyşynyň käbir mysallaryna seredip geçeliň.

Mysal. Berlen pursatda $\vec{P}$ we $\vec{Q}$ güýçleriň täsirinde gorizontal tekizlikdäki kriwoşip-şatun mehanizminiň deňagramlykda bolmagy üçin nähili şertiň ýerine ýetmelidigini kesgitlemeli. $\vec{Q}$-A şarnire goýlan OA kriwoşipe perpendikulýar güýç, $\vec{P}$-B porşene goýlan güýç.

Çözülişi.



49.10-nji surat

Kriwoşip-şatun mehanizmine mümkin bolan orunüýtgetme bereliň. $\delta\vec{S}_A$-A nokadyň orunüýtgetmesi, $\delta\vec{S}_B$-B nokadyň orunüýtgetmesi. Bu orunüytgetmede $\vec{P}, \vec{Q}$ güýçleriň elementar işleriniň jemi nola deň bolmaly:

$$PdS_B - QdS_A = 0.$$

Bu ýerden $\frac{P}{Q} = \frac{dS_A}{dS_B}$. $\frac{dS_A}{dS_B}$-gatnaşygy kesgitlemek üçin AB şatunyň pursatdaky tizlikler merkezini (C nokat) ulanalyň:

$$\frac{dS_A}{dS_B} = \frac{\upsilon_A \cdot \Delta t}{\upsilon_B \cdot \Delta t} = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{\omega \cdot AC}{\omega \cdot BC} = \frac{AC}{BC}$$

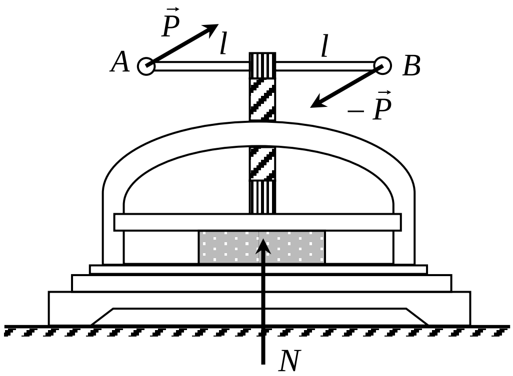
Sinuslar teoremasyny ulanyp, *ABC* üçburçlukdan alarys:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$$

ýa-da $\frac{P}{Q}=\frac{\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)}$. Diýmek, $\vec{P},\vec{Q}$ güýçler ýokarda alnan şerti kanagatlandyrsa, kriwoşip-şatun mehanizmi berlen pursatda deňagramlykda bolýar.

Mysal. Hyrly gysyjynyň (press) *AB* tutgujyna gorizontal tekizlikde ýerleşýän $(\vec{P},-\vec{P})$ jübüt täsir edýär, güýçler *AB* tutgyja perpendikulýar. $AB=2l$, hyryň ädimi *h*. Gysylýan jisim näçe güýç bilen gysylýar?

Çözülişi.



49.11-nji surat

Gysylýan jisimiň reaksiýa güýjüni $\vec{N}$ bilen belgiläp, seredilýän sistema mümkin bolan orunüýtgetme bereliň. Munuň üçin gysyjynyň tutgyjyny $\delta\varphi$ burça öwüreliň. Şeýlelikde, gysyjynyň jisimi gysýan bölegi aşaklygyna δh orunüýtgetme alar.

Täsir edýän güýçleriň elementar işleriniň jemi nola deň bolmaly, ýagny

$$2P\cdot l\cdot\delta\varphi-N\cdot\delta h=0$$

bu ýerden

$$N=2P\cdot l\cdot\frac{\delta\varphi}{\delta h} \qquad (*)$$

$\frac{\delta\varphi}{\delta h}$ gatnaşygy kesgitläliň.

Gysyjynyň tutgujy bir aýlaw (2π) edende tutgujyň gysýan bölegi bir ädim (h) aşak düşýär. Diýmek, $\frac{\delta\varphi}{2\pi}=\frac{\delta h}{h}$, bu ýerden, $\frac{\delta\varphi}{\delta h}=\frac{2\pi}{h}$. Onda ýokardaky (*) deňlikden alarys:

$$N=\frac{4\pi\cdot P\cdot l}{h}$$

Soralýan güýç ululygy boýunça *N*-e deň (dinamikanyň III kanuny).

§50. Dinamikanyň umumy deňlemesi.

1. **Umumylaşdyrylan güýçler.**
2. **Umumylaşdyrylan koordinatalarda mehaniki sistemanyň deňagramlyk şerti.**
3. **Dinamikanyň umumy deňlemesi.**

50.1. Umumylaşdyrylan güýçler.

Erkinlik derejesi k bolan n sany material nokatdan ybarat mehaniki sistema seredeliň. $q_1, q_2, ..., q_k$ -sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatalary. $\vec{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ sistemanyň "i" nokadyna täsir edýän goýlan güýç.

Geçen paragrafda belläp geçişimiz ýaly, mehaniki sistemanyň nokatlarynyň dekart koordinatalary umumylaşdyrylan koordinatalara bagly

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_k), \\ y_i = y_i(q_1, q_2, ..., q_k) \quad i = \overline{1, n}, \\ z_i = z_i(q_1, q_2, ..., q_k). \end{cases} \tag{50.1}$$

funksiýalar bolup durýarlar. Şeýle-de, sistemanyň nokatlarynyň dekart koordinatalarynyň wariasiýalary umumylaşdyrylan koordinatalaryň wariasiýalaryna bagly:

$$\begin{cases} \delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k, \\ \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad i = \overline{1, n}, \\ \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k. \end{cases} \tag{50.2}$$

Belli bolşy ýaly, $\vec{F}_i$ güýjüň nokadyň $\delta\vec{r}_i$ orunüýtgetmesindäki elementar işi $\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deň, ýagny

$$\delta A_i = (\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i) = F_{ix} \cdot \delta x_i + F_{iy} \cdot \delta y_i + F_{iz} \cdot \delta z_i, \; i = \overline{1, n}$$

Bu aňlatmany "i" indeks boýunça goşalyň. Şeýlelikde, (50.2) deňligi ulanyp, $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_k$ köpeldijileri ýaýyň daşyna çykaryp taparys:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_i = {} & \delta q_1 \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right) + \\ & + \delta q_2 \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_2} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_2} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right) + ... + \\ & + \delta q_k \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) \end{aligned} \tag{50.3}$$

(50.3) deňlik mehaniki sistema goýlan güýçleriň elementar işleriniň jemini berýär. Şertli belgileme girizeliň:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_1}+F_{iy}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_1}+F_{iz}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)=Q_1 \ , \\ \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_2}+F_{iy}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_2}+F_{iz}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_2}\right)=Q_2 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}+F_{iy}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}+F_{iz}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=Q_k \ . \end{cases} \tag{50.4}$$

Onda (50.3) deňlikden sistema goýlan güýçleriň elementar işleriniň jeminiň umumylaşdyrylan koordinatalaryň üstünden aňladylyşyny taparys:

$$\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_k \cdot \delta q_k \tag{50.5}$$

Ýokarda getirilen Q_j , $j=\overline{1,n}$ ululyklara **umumylaşdyrylan güýçler** diýilýär.

Umumylaşdyrylan güýçleri kesgitlemek üçin (50.4) deňligi ýa-da aşakda görkezilen usuly ulanmaly.

Mehaniki sistema diňe bir umumylaşdyrylan koordinata (q_j) artdyrma alyp, galanlary artdyrma almaz ýaly orunüýtgetme bermeli, ýagny

$$\delta q_1 = 0,\ \delta q_2 = 0, \ldots,\ \delta q_{j-1} = 0,\ \delta q_j \neq 0,\ \delta q_{j+1} = 0, \ldots,\ \delta q_k = 0$$

bolsun. Onda (50.5) deňligiň esasynda alarys:

$$\sum \delta A_i = Q_j \cdot \delta q_j \ ,$$

bu ýerden:

$$Q_j = \frac{\sum \delta A_i}{\delta q_j} \tag{50.6}$$

(50.6) deňlikden görnüşi ýaly, umumylaşdyrylan güýjüň ölçeg birligi güýç ölçeg birligi däl. Umumylaşdyrylan güýjüň ölçeg birligi mehaniki işiň ölçeg birliginiň degişli umumylaşdyrylan koordinatanyň ölçeg birligine gatnaşygy ýaly kesgitlenýär:

$$[Q_j] = \frac{[iş]}{[q_j]}$$

50.2. Umumylaşdyrylan koordinatalarda mehaniki sistemanyň deňagramlyk şerti.

Mehaniki sistemanyň deňagramlyk şertini umumylaşdyrylan koordinatalarda almak üçin (50.5) deňligi ulanalyň.

Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipinden, şeýle-de, (50.5) deňlikden mehaniki sistemanyň berlen pursatda deňagramlykda bolmagy üçin

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_k \cdot \delta q_k = 0 \tag{50.7}$$

deňligiň ýerine ýetmekliginiň zerurlygy we ýeterlikdigi gelip çykýar. Bu deňlik mehaniki sistemanyň islendik mümkin bolan orunüýtgetmesinde ýerine ýetmeli. Emma $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ ululyklar biri-birine bagly däl. Şol sebäpli (50.7) deňlikden

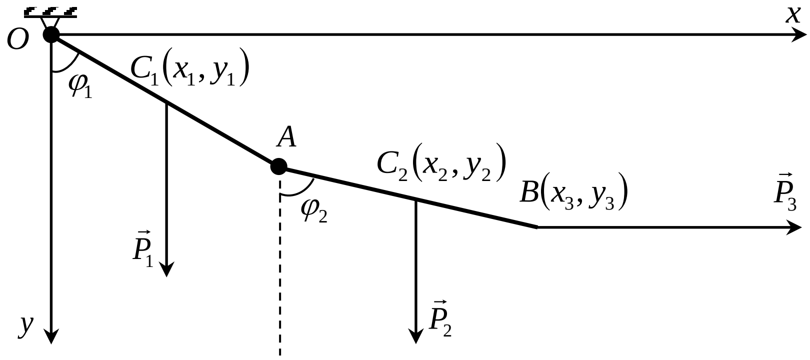
$$Q_1 = 0 \ ,\ Q_2 = 0 \ , \ldots,\ Q_k = 0 \tag{50.8}$$

bolmalydygy gelip çykýar. Şeýlelik bilen, ideal baglanyşykly mehaniki sistemanyň berlen ýagdaýda deňagramlykda bolmagy üçin sistemanyň şu ýagdaýynda hasaplanylan umumylaşdyrylan güýçleriň nola deň bolmaklygy zerur we ýeterlikdir.

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Uzynlygy $2l_1$, agramy P_1 bolan *OA* steržen *O* nokada şarnirli birikdirilen. *OA* steržen bilen uzynlygy $2l_2$, agramy P_2 bolan *AB* steržen şarnirli birikdirilen. *AB* sterženiň *B* nokadyna $\vec{P}_3$ gorizontal güýç goýlan. Mehanizm wertikal tekizlikde deňagramlykda saklanýar. *OA, AB* sterženleriň wertikal bilen emele getirýän φ_1, φ_2 burçlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi.



50.1-nji surat

$C_1(x_1, y_1)$-*OA* sterženiň ortasy $C_2(x_2, y_2)$-*AB* sterženiň ortasy. *x,y* oklaryny 50.1-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň. Goýlan güýçler: $\vec{P}_1 = (0, P_1)$, $\vec{P}_2 = (0, P_2)$, $\vec{P}_3 = (P_3, 0)$.

(50.3) deňlikden peýdalanyp goýlan güýçleriň elementar işleriniň jemini ýazalyň

$$\begin{aligned} \delta A &= P_{1x}\cdot\delta x_1 + P_{1y}\cdot\delta y_1 + P_{2x}\cdot\delta x_2 + P_{2y}\cdot\delta y_2 + P_{3x}\cdot\delta x_3 + P_{3y}\cdot\delta y_3 = \\ &= P_1\cdot\delta y_1 + P_2\cdot\delta y_2 + P_3\cdot\delta x_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

(*) deňlige girýän $\delta y_1, \delta y_2, \delta x_3$ wariasiýalary hasaplamak üçin y_1, y_2, x_3 ululyklary umumylaşdyrylan koordinatalaryň, ýagny φ_1, φ_2 ululyklaryň üsti bilen aňladalyň (50.1-nji surat):

$$\begin{cases} y_1 = l_1\cdot\cos\varphi_1\ , \\ y_2 = 2l_1\cdot\cos\varphi_1 + l_2\cdot\cos\varphi_2\ , \\ x_3 = 2l_1\cdot\sin\varphi_1 + 2l_2\cdot\sin\varphi_2\ . \end{cases}$$

Getirilen deňliklerden (50.2) deňlemänin esasynda taparys:

$$\delta y_1 = -l_1\cdot\sin\varphi_1\cdot\delta\varphi_1\ ,$$
$$\delta y_2 = -2l_1\cdot\sin\varphi_1\cdot\delta\varphi_1 - l_2\cdot\sin\varphi_2\cdot\delta\varphi_2\ ,$$
$$\delta x_3 = 2l_1\cdot\cos\varphi_1\cdot\delta\varphi_1 + 2l_2\cdot\cos\varphi_2\cdot\delta\varphi_2\ .$$

Tapylan wariasiýalary (*) deňlikde ýerine goýalyň:

$$\begin{aligned} \delta A = &-P_1\cdot l_1\cdot\sin\varphi_1\cdot\delta\varphi_1 - 2P_2\cdot l_1\cdot\sin\varphi_1\cdot\delta\varphi_1 - P_2\cdot l_2\cdot\sin\varphi_2\cdot\delta\varphi_2 + \\ &+ 2P_3\cdot l_1\cdot\cos\varphi_1\cdot\delta\varphi_1 + 2P_3\cdot l_2\cdot\cos\varphi_2\cdot\delta\varphi_2 \end{aligned}$$

ýa-da:

$$\begin{aligned} \delta A = &\left(-P_1\cdot l_1\cdot\sin\varphi_1 - 2P_2\cdot l_1\cdot\sin\varphi_1 + 2P_3\cdot l_1\cdot\cos\varphi_1\right)\cdot\delta\varphi_1 + \\ &+ \left(2P_3\cdot l_2\cdot\cos\varphi_2 - P_2\cdot l_2\cdot\sin\varphi_2\right)\cdot\delta\varphi_2 \end{aligned}$$

Alnan deňlikde $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ wariasiýalaryň koeffisiýentleri degişlilikde φ_1, φ_2 umumylaşdyrylan koordinatalara degişli umumylaşdyrylan güýçler bolup durýarlar. Diýmek,

$$Q_{\varphi_1} = -P_1 \cdot l_1 \cdot \sin\varphi_1 - 2P_2 \cdot l_1 \cdot \sin\varphi_1 + 2P_3 \cdot l_1 \cdot \cos\varphi_1 ,$$

$$Q_{\varphi_2} = 2P_3 \cdot l_2 \cdot \cos\varphi_2 - P_2 \cdot l_2 \cdot \sin\varphi_2 .$$

Umumylaşdyrylan güýçleri nola deňläp, φ_1, φ_2 burçlary kesgitläris:

$$Q_{\varphi_1} = 0 \;\Rightarrow tg\varphi_1 = \frac{2P_3 \cdot l_1}{P_1 \cdot l_1 + 2P_2 \cdot l_1} = \frac{2P_3}{P_1 + 2P_2} ,$$

$$Q_{\varphi_2} = 0 \;\Rightarrow tg\varphi_2 = \frac{2P_3 \cdot l_2}{P_2 \cdot l_2} = \frac{2P_3}{P_2} .$$

50.3. Dinamikanyň umumy deňlemesi.

Mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipi statikanyň meseleleriniň çözülişiniň umumy usulyny berýär. Dalamberiň prinsipi dinamikanyň meselelerini çözmeklikde statikanyň usullaryny ulanmaklyga mümkinçilik berýär. Bu iki prinsipi bilelikde ulanyp, dinamikanyň meselelerini çözmekligiň umumy usulyny kesgitläp bolar.

Goý, seredilýän mehaniki sistema ideal baglanyşykly bolsun. Mehaniki sistemanyň nokatlaryna täsir edýän $\vec{F}_i$ berlen we $\vec{N}_i$ reaksiýa güýçlerden daşary olaryň $\vec{F}_i^{in}$ inersiýa güýçleri bilen täsir edilse, Dalamberiň prinsipine laýyklykda mehaniki sistema deňagramlykda bolmaly, ýagny $\vec{F}_i, \vec{N}_i, \vec{F}_i^{in}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ güýçler deňagramlaşan güýçler sistemasyny emele getirýärler. Onda mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipinden taparys:

$$\sum \delta A_{\vec{F}_i} + \sum \delta A_{\vec{N}_i} + \sum \delta A_{\vec{F}_i^{in}} = 0 .$$

Emma mehaniki sistema ideal baglanyşyklydygy sebäpli $\sum \delta A_{\vec{N}_i} = 0$. Diýmek, netijede

$$\sum \delta A_{\vec{F}_i} + \sum \delta A_{\vec{F}_i^{in}} = 0 \qquad (50.9)$$

deňligi alarys. Alnan netije **Dalamber-Lagranžyň prinsipini** görkezýär:

Ideal baglanyşykly mehaniki sistemanyň hereketinde islendik wagt pursatynda berlen güýçleriň we inersiýa güýçleriň elementar işleriniň jemi nola deň.

(50.9) deňlemäni analitiki görnüşde ýazalyň:

$$\sum\left(F_{ix} + F_{ix}^{in}\right)\delta x_i + \sum\left(F_{iy} + F_{iy}^{in}\right)\delta y_i + \sum\left(F_{iz} + F_{iz}^{in}\right)\delta z_i = 0 \qquad (50.10)$$

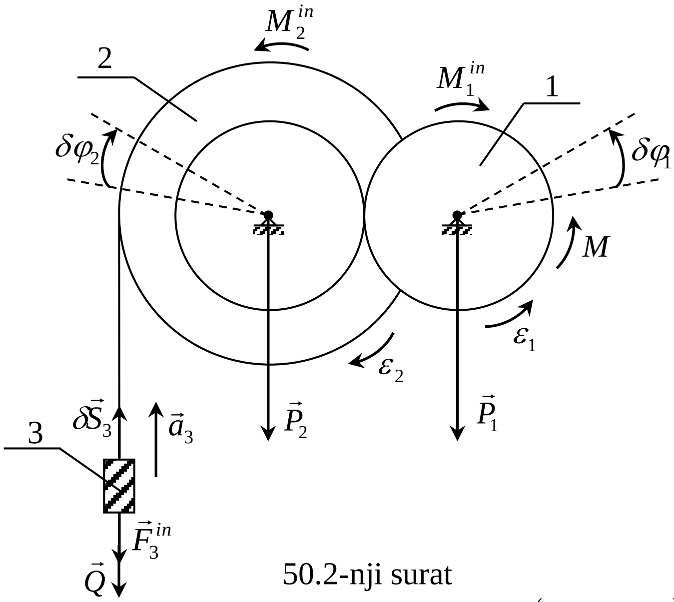
Bu deňlemä **dinamikanyň umumy deňlemesi** diýilýär. Dinamikanyň umumy deňlemesini şeýle görnüşde hem ýazyp bolar:

$$\sum\left(\vec{F}_i + \vec{F}_i^{in}, \delta\vec{r}_i\right) = 0 . \qquad (50.11)$$

Bu ýerde $\delta\vec{r}_i$ –“i ”nokadyň elementar orunüýtgetmesi.

(50.9) we (50.10) deňlemeler mehaniki sistemanyň hereketiniň differensial deňlemesini ýazmaga mümkinçilik berýär. Şeýlelikde, eger mehaniki sistema birnäçe gaty jisimlerden ybarat bolsa, onda her bir jisime täsir edýän berlen güýçlere saýlanyp alnan merkezde goýlan inersiýa güýçleriniň baş wektoryny we inersiýa

güýçleriniň bu merkeze görä baş momentini goşmaly. Şundan soň mümkin bolan orunüýtgetmeler prinsipini ulanmaly.
Bir mysala seredeliň.
Mysal. 50.2-nji suratda görkezilen wertikal tekizlikdäki göterijiniň agramy P_1, aýlanma okuna görä inersiýa radiusy ρ_1 bolan 1 belgili şesternýa M aýlandyryjy moment goýlan. Daşyna ýüp oralýan 2 belgili baraban ýene bir şesternýa bilen berkidilen we olaryň umumy agramy P_2, aýlanma okuna görä inersiýa radiusy ρ_2. Şesternýalaryň radiuslary degişlilikde r_1 we r_2. Barabanyň radiusy r, göterilýän jisimiň agramy Q. Ýüpüň agramyny we oklardaky sürtülmäni göz öňünde tutmazdan jisimiň tizlenmesini kesgitlemeli.
Çözülişi.



50.2-nji surat

Mehaniki sistema täsir edýän berlen güýçleri $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}\right)$ we 3 belgili jisimiň $\vec{F}_3^{in}$ inersiýa güýjüni, şeýle-deб 1,2 jisimleriň nokatlarynyň inersiýa güýçleriniň M_1^{in}, M_2^{in} baş momentlerini şekillendireliň. $F_3^{in}, M_1^{in}, M_2^{in}$ ululyklaryň absolýut bahalary:

$$F_3^{in} = m_3 \cdot a_3 = \frac{Q}{g} \cdot a_3 \ ,$$

$$\left|M_1^{in}\right| = I_1 \cdot \varepsilon_1 = m_1 \cdot \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1 \ ,$$

$$\left|M_2^{in}\right| = I_2 \cdot \varepsilon_2 = m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2 \ .$$

Mehaniki sistema mümkin bolan orunüýtgetme bereliň we (50.9) deňlemäni düzeliň.

$$-\left(Q + F_3^{in}\right) \cdot \delta S_3 + \left(M - M_1^{in}\right) \cdot \delta\varphi_1 - M_2^{in} \cdot \delta\varphi_2 = 0 \qquad (*)$$

bu ýerde $\delta\varphi_1$–1 jisimiň orunüýtgetme burçy; $\delta\varphi_2$–2 jisimiň orunüýtgetme burçy; δS_3–3 jisimiň orunüýtgetmesi.

$\delta\varphi_1$ we δS_3 ululyklary $\delta\varphi_2$ ululygyň üsti bilen aňladyp taparys:

$$\delta S_3 = r \cdot \delta\varphi_2 \ ,$$

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \delta\varphi_2 \ .$$

Bu ululyklary we F_3^{in}, M_1^{in}, M_2^{in} ululyklary (*) deňlemede goýup, alnan deňlemäni $\delta\varphi_2$ ululyga gysgaldyp taparys:

$$Q\left(1+\frac{a_3}{g}\right) \cdot r + \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{P_1}{g} \cdot \rho_1^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} - M \cdot \frac{r_2}{r_1} = 0 \qquad (**)$$

(**) deňlemä girýän $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ululyklary gözlenýän a_3-ň üsti bilen aňladalyň:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{r} \quad ; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2 \cdot a_3}{r \cdot r_1}$$

we (**) deňlemede ýerine goýup, gözlenilýän ululygy kesgitläris:

$$a_3 = \frac{\frac{r \cdot r_2}{r_1} \cdot M - r^2 \cdot Q}{r^2 \cdot Q + \rho_2^2 \cdot P_2 + \frac{\rho_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2} \cdot P_1} \cdot g$$

§51. Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri.

1. **Umumylaşdyrylan inersiýa güýçleri.**
2. **Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri.**
3. **Mehaniki sistema täsir edýän güýçler potensial bolanda Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri.**

51.1. Umumylaşdyrylan inersiýa güýçleri.

n sany material nokatdan ybarat mehaniki sistema seredeliň. Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$\vec{r}_i$-“i ” nokadyň gozganmaýan nokatdan geçirilen radius-wektory;

$\vec{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$-“$i$ ” nokada täsir edýän berlen güýç;

$\vec{F}_i^{in} = (F_{ix}^{in}, F_{iy}^{in}, F_{iz}^{in})$-“$i$ ” nokadyň inersiýa güýji;

$q_1, q_2, ..., q_S$ -mehaniki sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatalary.

Öňki paragrafda mehaniki sistema täsir edýän berlen güýçleriň elementar işleriniň jeminiň tapylyşyna meňzeşlikde, sistemanyň inersiýa güýçleriniň elementar işleriniň jemi şeýle tapylýar:

$$\sum \delta A_i^{in} = Q_1^{in} \cdot \delta q_1 + Q_2^{in} \cdot \delta q_2 + ... + Q_S^{in} \cdot \delta q_S \qquad (51.1)$$

Bu ýerdäki:

$$
\begin{cases}
Q_1^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}^{in}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{iy}^{in}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{iz}^{in}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{in}, \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\right), \\
Q_2^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}^{in}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_2} + F_{iy}^{in}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_2} + F_{iz}^{in}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{in}, \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\right), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
Q_S^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}^{in}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_S} + F_{iy}^{in}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_S} + F_{iz}^{in}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_S}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{in}, \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_S}\right)
\end{cases}
\tag{51.2}
$$

ululyklara **umumylaşdyrylan inersiýa güýçleri** diýilýär. Umumy görnüşde ýazanymyzda umumylaşdyrylan inersiýa güýçleri üçin

$$
Q_j^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{in}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right), \quad j = \overline{1, S} \tag{51.3}
$$

formulany alarys.

51.2. Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri.

(51.1) deňlik bilen kesgitlenýän umumylaşdyrylan inersiýa güýçleriniň elementar işleriniň jemini we önki paragrafda getirilen (50.5) deňlik bilen kesgitlenýän berlen güýçleriň elementar işleriniň jemini dinamikanyň umumy deňlemesinde (50.9) goýup alarys:

$$
\left(Q_1 + Q_1^{in}\right)\cdot \delta q_1 + \left(Q_2 + Q_2^{in}\right)\cdot \delta q_2 + \ldots + \left(Q_S + Q_S^{in}\right)\cdot \delta q_S = 0 \tag{51.4}
$$

$\delta q_1, \delta q_2, \ldots., \delta q_S$ wariasiýalaryň özara bagly däldigi sebäpli (51.4) deňlemedäki her bir goşulyjy nola deň bolmaly, ýagny:

$$
\begin{cases}
Q_1 + Q_1^{in} = 0\ , \\
Q_2 + Q_2^{in} = 0\ , \\
\dots\dots\dots\dots \\
Q_S + Q_S^{in} = 0\ .
\end{cases}
\tag{51.5}
$$

Dinamikanyň meseleleri çözlende (51.5) deňlemelerden peýdalanyp bolar. Emma umumylaşdyrylan güýçler mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň üsti bilen aňladylanda, mehaniki sistemanyň hereketiniň differensial deňlemesini düzmek ýeňilleşýär. Mälim bolşy ýaly,

$$
\vec{F}_i^{in} = -m_i \cdot \vec{a}_i = -m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}
$$

Onda (51.3) formuladan alarys:

$$
-Q_j^{in} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\vec{F}_i^{in}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \tag{51.6}
$$

Şu ýerde $\left(\dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}, \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)$ skalýar köpeltmek hasylynyň üstünde käbir özgertmeleri ýerine ýetireliň:

$$\left(\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)-\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right) \qquad (51.7)$$

(51.7) deňligiň dogrudygyna ýönekeý differensirlemek bilen göz ýetirip bolar. Özgertmeleriň yzyny

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j} \text{ we } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial q_j} \qquad (51.8)$$

deňlikler bilen dowam ederis. Ilki bilen bu deňlikleriň dogrudygyny subut edeliň. Elbetde, mehaniki sistemanyň nokadynyň radius-wektory umumylaşdyrylan koordinatalara bagly, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,q_2,....,q_S)$. Diýmek

$$\vec{\upsilon}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2+...+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_S}\cdot\dot{q}_S\,.$$

Bu ýerden $\dfrac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j}=\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$. Önüm almakda orunçalşyrma kanunyndan peýdalanyp taparys:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)=\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial q_j}$$

Subut edilen (51.8) deňlikdäki ululyklary (51.7)-de ýerine goýalyň.

$$\left(\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)-\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\left(\vec{\upsilon}_i,\frac{\partial\vec{\upsilon}_i}{\partial q_j}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}(\vec{\upsilon}_i,\vec{\upsilon}_i)\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}(\vec{\upsilon}_i,\vec{\upsilon}_i)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\upsilon_i^2)}{\partial\dot{q}_j}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial(\upsilon_i^2)}{\partial q_j}$$

Alnan deňligi (51.6) deňlikde goýup alarys:

$$-Q_j^{in}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt},\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\upsilon_i^2)}{\partial\dot{q}_j}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial(\upsilon_i^2)}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2$$

Alnan aňlatmadaky jemler mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy bolup durýar. Diýmek, şeýle netije alyndy:

$$-Q_j^{in}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\ ,\ \ j=\overline{1,S}\ , \qquad (51.9)$$

bu ýerde *T*-mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy.

Alnan (51.9) formulany (51.5) deňlemeler sistemasynda goýup taparys:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \ , \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_S}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_S} = Q_S \ .
\end{cases} \tag{51.10}
$$

Tapylan (51.10) deňlemeler stasionar we ideal baglanyşykly mehaniki sistemanyň hereketiniň differensial deňlemeleri bolup, bu deňlemelere **Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri** diýilýär.

Bellik. Elbetde, Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri stasionar we ideal baglanyşykly sistemalar üçin alyndy. Emma, bu deňlemeler ideal baglanyşykly golonom sistemalar üçin hem dogrudyr. Mehaniki sistema üçin (51.10) deňlemeler düzülende aşakda getirilen tertibi saklamaly:

1. mehaniki sistemanyň erkinlik derejesini kesgitläp, umumylaşdyrylan koordinatalary girizmeli;

2. mehaniki sistemany erkin ýagdaýda şekillendirip, täsir edýän güýçleri görkezmeli;

3. umumylaşdyrylan Q_j güýçleri kesgitlemeli, şeýlelikde, sistema orunüýtgetme berlende degişli umumylaşdyrylan koordinatanyň artdyrmasyny položitel ugra bermeli;

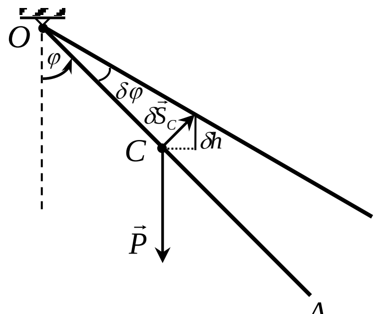
4. mehaniki sistemanyň kinetik energiýasyny kesgitlemeli;

5. (51.10) deňlemeleri ýazmaly.

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Uzynlygy $2l$ bolan fiziki maýatnigiň (steržen) yrgyldyly hereketiniň differensial deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi.



51.1-nji surat

Fiziki maýatnigiň erkinlik derejesi bire deň;

φ-umumylaşdyrylan koordinata (sterženiň wertikaldan gyşarma burçy);

$\vec{P}$-agyrlyk güýji;

C - maýatnigiň agyrlyk merkezi, $OC = CA = l$.

Umumylaşdyrylan koordinata $\delta\varphi$ artdyrma bereliň. Şeýlelikde, C nokat $\delta\vec{S}_C$ orunüýtgetme alar, $\delta\vec{S}_C \perp OA$.

Belli bolşy ýaly, agyrlyk güýjüniň mehaniki işi wertikal boýunça orunüýtgemä bagly. Onda

$$\delta A = -P \cdot \delta h = -P \cdot \delta S_C \cdot \sin\varphi = -P \cdot l \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi = -mgl\sin\varphi\,\delta\varphi$$

Bu ýerden umumylaşdyrylan güýç $Q_\varphi = -mgl\sin\varphi$.

Fiziki maýatnigiň kinetik energiýasyny kesgitläliň.

$$T = I\frac{\omega^2}{2} = I\frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{1}{3}m(2l)^2 \cdot \frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{2}{3}ml^2\dot\varphi^2,$$

bu ýerde *I*-fiziki maýatnigiň aýlanma oka görä inersiýa momenti.
Lagranžyň II görnüşli deňlemesi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi \ . \qquad (*)$$

$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}, \frac{\partial T}{\partial\varphi}$ ululyklary tapalyň:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac{4ml^2}{3}\dot\varphi \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0$$

Bu ululyklary we umumylaşdyrylan güýji (*) deňlemede goýup, fiziki maýatnigiň hereketiniň differensial deňlemesini $\frac{4}{3}ml^2 \cdot \ddot\varphi = -mgl \cdot \sin\varphi$ görnüşde alarys ýa-da $\frac{3g}{4l} = k^2$ şertli belgilemäni girizip taparys:

$$\ddot\varphi + k^2\sin\varphi = 0$$

Elbetde, kiçi yrgyldylarda $\sin\varphi \approx \varphi$ takmynan deňligi ulansak, ýokardaky deňleme $\ddot\varphi + k^2\varphi = 0$ görnüşe eýe bolar.

51.3. Mehaniki sistema täsir edýän güýçler potensial bolanda Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemeleri.

Goý, mehaniki sistema täsir edýän güýçler potensial güýçler bolsun. Başgaça aýdylanda mehaniki sistema potensial meýdanda hereket edýän bolsun. Onda 41-nji paragrafdan belli bolşy ýaly, $U(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,n}$ funksiýa tapylyp, bu funksiýanyň doly differensialy täsir edýän güýçleriň elementar işleriniň jemine deň:

$$\sum \delta A_i = dU \qquad (51.11)$$

41-nji paragrafda belläp geçişimiz ýaly U funksiýa potensial meýdanyň güýç funksiýasy diýilýär. Sistemanyň nokatlarynyň dekart koordinatalary umumylaşdyrylan koordinatalara baglydygy sebäpli U funksiýa hem umumylaşdyrylan koordinatalara bagly, $U = U(q_1, q_2, ..., q_S)$. Onda (51.11) deňlikden alarys:

$$\sum \delta A_i = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_S}\delta q_S \qquad (51.12)$$

Täsir edýän güýçleriň elementar işleriniň jemini kesgitleýän (50.5) formuladan we (51.12) deňlikden alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = Q_1\ , \ \frac{\partial U}{\partial q_2} = Q_2\ , \ ... \ , \ \frac{\partial U}{\partial q_S} = Q_S \qquad (51.13)$$

ýa-da potensial energiýa $\Pi = -U$ bolandygy sebäpli:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\,,\; Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\,,\; \dots\,,\; Q_S = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_S} \qquad (51.14)$$

Şeýlelik bilen, **täsir edýän güýçler potensial güýçler bolanda, umumylaşdyrylan *U* güýç funksiýasynyň degişli umumylaşdyrylan koordinata boýunça önümine ýa-da ters alamat bilen alnan sistemanyň potensial energiýasynyň degişli umumylaşdyrylan koordinata boýunça önümine deň.** **Lagranžyň funksiýasy** diýlip atlandyrylýan

$$L = T - \Pi \qquad (51.15)$$

ululygy girizeliň; bu ýerde *T*-sistemanyň kinetik energiýasy *Π*-sistemanyň potensial energiýasy.

Lagranžyň funksiýasy $q_i\left(i = \overline{1,S}\right)$ umumylaşdyrylan koordinatalara, $\dot{q}_j\left(j = \overline{1,S}\right)$ umumylaşdyrylan tizliklere bagly, $L = L\left(q_1, q_2, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S\right)$

Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemesini özgerdip ýazalyň:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

ýa-da

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$

Π umumylaşdyrylan tizliklere bagly däl. Onda ýokardaky deňligi dowam edip alarys:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(T - \Pi\right) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(T - \Pi\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(T - \Pi\right) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\;. \qquad (51.16)$$

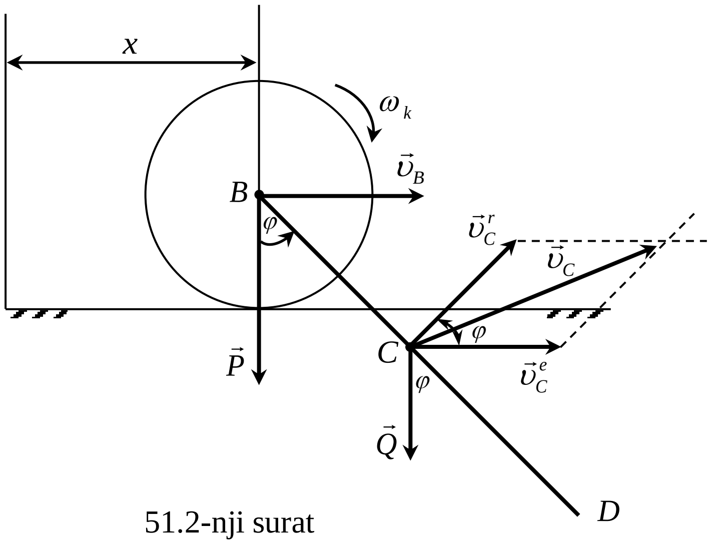
Alnan (51.16) deňlemäni her bir *j* indeks üçin ýazyp,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0\,, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_S} = 0 \end{cases} \qquad (51.17)$$

deňlemeler sistemasyny alarys. Alnan deňlemeler sistemasy ideal baglanyşykly golonom mehaniki sistemanyň potensial meýdandaky hereketini häsiýetlendirýär.

(51.17) deňlemeleriň ulanylyşyna degişli mysala seredip geçeliň.

Mysal. Gorizontal tekizlikde typman hereket edýän P agramly birjynsly katogyň B merkezine l uzynlykly Q agramly birjynsly BD steržen şarnirli birikdirilen. Sistemanyň hereketiniň differensial deňlemelerini ýazmaly.
Çözülişi. Seredilýän mehaniki sistemanyň {katok+steržen} erkinlik derejesi ikä deň. umumylaşdyrylan koordinatalary girizeliň:
x-katogyň merkezinden onuň başlangyç ýerleşen ýerine çenli uzaklyk;
φ-sterženiň wertikaldan gyşarma burçy.



51.2-nji surat

Täsir edýän güýçler potensial güýçlerdigi (agyrlyk güýçleri) sebäpli Lagranžyň (51.17) deňlemeler sistemasyny

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \ , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \qquad (51.18)$$

görnüşde ýazalyň; bu ýerde $L = T - \Pi$ Lagranžyň funksiýasy. Sistemanyň potensial energiýasy $\Pi = -\dfrac{Q \cdot l}{2} \cdot \cos\varphi$. Kinetik energiýasy: $T = T_{katok} + T_{sterzen}$
Belgilemeleri girizeliň: m_k-katogyň massasy; m_{st}-sterženiň massasy; ω_k-katogyň burç tizligi; ω_{st}-sterženiň burç tizligi;
Katogy silindr hökmünde kabul edip taparys:

$$T_{katok} = I_B \frac{\omega_k^2}{2} + \frac{1}{2} m_k \cdot \upsilon_B^2 = \frac{1}{2} m_k \cdot r^2 \frac{\upsilon_B^2}{2r^2} + \frac{1}{2} m_k \cdot \upsilon_B^2 = \frac{3}{4} m_k \cdot \upsilon_B^2 = \frac{3P}{4g} \upsilon_B^2 = \frac{3P}{4g} \dot{x}^2$$

Sterženiň kinetik energiýasy:

$$T_{st} = I_C \frac{\omega_{st}^2}{2} + \frac{1}{2} m_{st} \cdot \upsilon_C^2 = \frac{1}{12} m_{st} \cdot l^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} m_{st} \cdot \upsilon_C^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{Q \cdot l^2}{g} \dot{\varphi}^2 + \frac{Q}{2g} \cdot \upsilon_C^2$$

C nokadyň hereketi çylşyrymly hereket. Diýmek,

$$\vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon}_C^e + \vec{\upsilon}_C^r \ , \ \upsilon_C^e = \upsilon_B = \dot{x} \ , \ \upsilon_C^r = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \cdot l$$

Onda (51.2-nji surat):

$$\upsilon_C^2 = \upsilon_C^{e^2} + \upsilon_C^{r^2} + 2\upsilon_C^e \cdot \upsilon_C^r \cdot \cos\varphi = \dot{x}^2 + \frac{l^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{4} + l \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x} \cos\varphi$$

Şeýlelik bilen, Lagranžyň funksiýasy üçin

$$L = \frac{3P}{4g}\dot{x}^2 + \frac{Q}{2g}\left(\dot{x}^2 + l\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{x}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{Q\cdot l}{2}\cos\varphi$$

aňlatmany alarys. Bu ýerden

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3P+2Q}{2g}\cdot\dot{x} + \frac{Q\cdot l}{2g}\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi \ , \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{Q}{g}\left(\frac{l}{2}\cdot\dot{x}\cdot\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\cdot\dot{\varphi}\right) \ , \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{Q}{2g}l\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{x}\cdot\sin\varphi - \frac{Q\cdot l}{2}\sin\varphi .$$

Bu ululyklary (*) sistemada goýup, gözlenýän differensial deňlemeleri taparys:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[(3P+2Q)\cdot\dot{x} + Q\cdot l\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi\right] = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}\cdot\cos\varphi + \dfrac{2}{3}l\cdot\dot{\varphi}\right) + \dot{x}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi + g\cdot\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

13-nji BAP
Mehaniki sistemanyň durnukly deňagramlyk ýagdaýynyň golaýyndaky kiçi yrgyldylar.

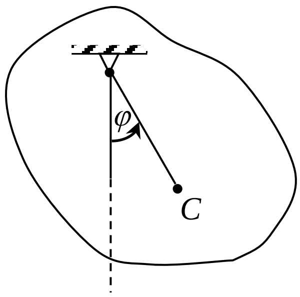
§52. Durnuklylyk düşünjesi.

Mehaniki sistemanyň deňagramlygy öwrenilende bu deňagramlygyň amaly taýdan amala aşyryp boljakdygy ýa-da bolmajakdygy, ýagny deňagramlygyň durnuklylygy barada sorag ýüze çykýar.

Deňagramlygyň durnuklylygynyň kesgitlemesi hökmünde A.Lýapunowyň kesgitlemesini getireliň:

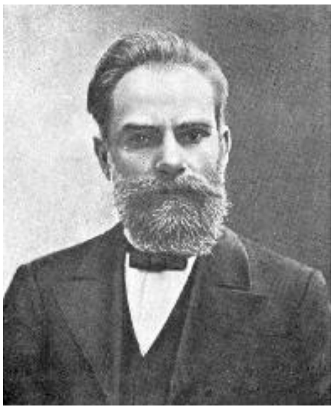
Eger deňagramlykdaky mehaniki sistema kiçi gozganma (itergi) bilen deňagramlyk ýagdaýdan çykarlanda wagtyň geçmegi bilen sistemanyň deňagramlyk ýagdaýyndan gyşarmasy öňünden kesgitlenen islendik ululykdan kiçi bolsa, onda bu sistemanyň deňagramlygyna **durnukly deňagramlyk** diýilýär. Şu şert ýerine ýetmese, onda bu deňagramlyga durnukly däl deňagramlyk diýilýär.

Bu kesgitlemä laýyklykda 52.1-nji suratda görkezilen fiziki maýatnik üçin $\varphi = 0$ bolanda durnukly deňagramlygyň, $\varphi = 180^0$ bolanda bolsa durnukly däl deňagramlygyň ýüze çykjakdygy düşnükli.



52.1-nji surat

C-maýatnigiň agyrlyk merkezi.



Aleksandr Mihaýlowiç Lýapunow (1857-1918)

Beýik rus matematigi we mehanigi. Alymyň ylmy işleri mehaniki sistemanyň hereketiniň we deňagramlygynyň durnuklylygyna bagyşlanan. Şeýle-de, çyzykly we çyzykly däl differensial deňlemeler nazaryýetinde wajyp açyşlar A.M.Lýapunow tarapyndan edilendir.

Mälim bolşy ýaly, potensial güýçleriň täsirinde hereket edýän mehaniki sistemanyň kinetik we potensial energiýalarynyň jemi hemişelik ululyk (§41), ýagny

$T+\Pi=const$. Bu ýagdaýda mehaniki sistema *konserwatiw mehaniki sistema* diýilýär.

Konserwatiw mehaniki sistemanyň deňagramlygynyň durnuklylygynyň ýeterlik şerti aşakda getirilen Lagranž-Dirihleniň teoremasy bilen berilýär.

Lagranž-Dirihleniň teoremasy. Eger deňagramlyk ýagdaýynda konserwatiw mehaniki sistemanyň potensial energiýasynyň minimum bahasy bar bolsa, onda bu ýagdaýda sistemanyň deňagramlygy durnuklydyr.

Ýokarda getirilen teorema deňagramlygyň durnuklylygynyň diňe ýeterlik şerti bolup durýar, emma potensial energiýa minimum baha eýe bolmadyk ýagdaýda teoremanyň esasynda durnuklylyk barada hiç zat aýdyp bolanok.

Erkinlik derejesi bire deň bolan konserwatiw sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatasy q bolup, $q=0$ deňagramlyk ýagdaýy bolsun. Onda (50.8) formulanyň esasynda $Q=0$, ýagny umumylaşdyrylan güýç nola deň bolmaly. Bu ýerden (51.14) deňlikden $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0=0$ bolmalydygy gelip çykýar. Mundan daşary $q=0$ bolanda potensial energiýa Π minimum baha eýe bolsa, onda $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0>0$ bolmaly. Diýmek, aşakda getirilen şert (ýeterlik) ýerine ýetende sistemanyň deňagramlygy durnukly bolar:

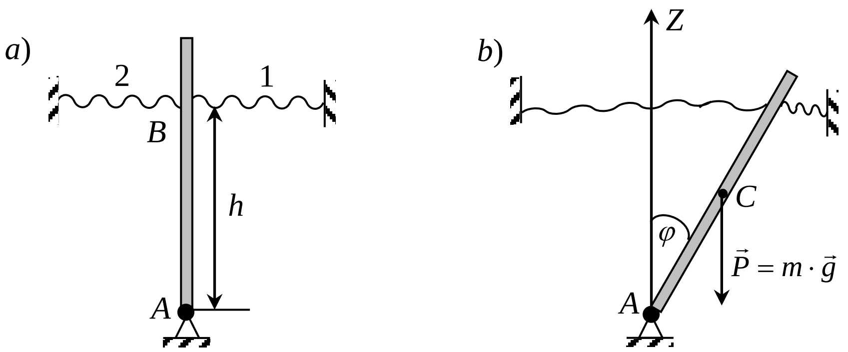
$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0=0\ ,\ \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0>0 \qquad (52.1)$$

Bellik. Mesele işlenende $\Pi(q)$ potensial energiýany q^2-a çenli takyklyk bilen kesgitlemek ýeterlik, sebäbi ikinji derejeden uly derejeli agzalar nola öwrülýär diýip hasap edip bolar.

Erkinlik derejesi bire deň bolan sistemanyň deňagramlygynyň durnuklylygyna degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Nähili şert ýerine ýetende A nokatdan geçýän gorizontal aýlanma oky bolan wertikal sterženiň deňagramlygy durnukly bolar?

Sterženiň massasy m. B nokatda steržene berkidilen 1,2 pružinleriň koeffisiýentleri degişlilikde C_1, C_2 we başlangyç gysylmalary $\lambda_{10}, \lambda_{20}$.



52.2-nji surat

Çözülişi. Umumylaşdyrylan koordinata hökmünde φ (sterženiň wertikaldan gyşarmasy) burçy alalyň (52.2-nji surat (b)).

φ-ni kiçi hasaplap, sistemanyň potensial energiýasyny φ^2 takyklykda kesgitläliň.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

Π_1-sterženiň potensial energiýasy:

$$\Pi_1 = mgZ_C = mg\frac{l}{2}\cdot\cos\varphi$$

Π_2-pružinleriň umumy potensial energiýasy:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\left[C_1\cdot(\lambda_{10} + h\cdot\varphi)^2 + C_2\cdot(\lambda_{20} - h\cdot\varphi)^2\right]$$

Π_2 tapylanda φ burçuň kiçidigi sebäpli B nokadyň orunüýtgetmesi gorizontal we $h\cdot\varphi$ deň hasap edip bolar. Şeýlelikde, 1 pružiniň gysylmasy artar, 2 pružiniň gysylmasy kemeler.

Kosinus funksiýanyň Makloreniň hataryna dargadylyşyny ulanyp, $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ deňligi kabul edip taparys:

$$\Pi = \Pi_0 - \left(mg\frac{l}{4}\right)\cdot\varphi^2 + \left(C_1\cdot\lambda_{10} - C_2\cdot\lambda_{20}\right)\cdot h\varphi + \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)\cdot h^2\cdot\varphi^2.$$

Bu ýerde Π_0-aňlatmadaky ähli hemişelikleri öz içine alýan hemişelik ululyk.

Bu ýerden

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -\left(m\cdot g\cdot\frac{l}{2}\right)\cdot\varphi + \left(C_1\cdot\lambda_{10} - C_2\cdot\lambda_{20}\right)\cdot h + \left(C_1 + C_2\right)\cdot h^2\cdot\varphi.$$

$\varphi = 0$ ýagdaýda sterženiň deňagramlykda bolmagy üçin $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right)_0 = 0$ bolmaly. Bu şerti ulanyp,

$$C_1\cdot\lambda_{10} = C_2\cdot\lambda_{20} \qquad (*)$$

deňligi alarys.

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = -m\cdot g\cdot\frac{l}{2} + \left(C_1 + C_2\right)\cdot h^2.$$

Onda $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} > 0$ şertden taparys:

$$C_1 + C_2 > \frac{m\cdot g\cdot l}{2\cdot h^2} \qquad (**)$$

Şeýlelik bilen, (*), (**) şertler ýerine ýetende sterženiň $\varphi = 0$ ýagdaýdaky deňagramlygy durnukly bolar.

§53. Erkinlik derejesi bire deň mehaniki sistemanyň kiçi yrgyldylary.

n sany material nokatdan ybarat, erkinlik derejesi bire deň durnukly deňagramlykdaky konserwatiw mehaniki sistema seredeliň.

q-sistemanyň umumylaşdyrylan koordinatasy;

$q=0$-sistemanyň deňagramlyk ýagdaýy.

Deňagramlygyň durnuklydygy, hem-de gozganmalaryň kiçidigi sebäpli q umumylaşdyrylan koordinata we $\dot{q}$ umumylaşdyrylan tizlik hereketiň dowamynda kiçi ululyklar bolup galýarlar.

Hereketiň differensial deňlemesini düzmek üçin Lagranžyň deňlemesinden (51.10) peýdalanalyň:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q$$

ýa-da $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}=-Q$ (51.14) deňligi göz öňünde tutup,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=0 \tag{53.1}$$

deňlemäni alarys. Elbetde, (53.1) çyzykly däl deňleme. Bu deňlemäni ýönekeýleşdirmek üçin $T(q,\dot{q}),\Pi(q)$ ululyklary q^2 we $\dot{q}^2$ takyklykda tapalyň.

Stasionar baglanyşyklar bolanda mehaniki sistemanyň islendik nokady üçin

$$\vec{r}_k=\vec{r}_k(q) \quad \text{we} \quad \vec{\upsilon}_k=\dot{\vec{r}}_k=\frac{d\vec{r}_k}{dq}\cdot\dot{q}$$

Onda

$$T=\frac{1}{2}\sum m_k\upsilon_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k\left(\frac{d\vec{r}_k}{dq}\dot{q},\frac{d\vec{r}_k}{dq}\dot{q}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum m_k\left(\frac{d\vec{r}_k}{dq},\frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)\right]\cdot\dot{q}^2=\frac{1}{2}F(q)\cdot\dot{q}^2,$$

bu ýerde $F(q)=\sum m_k\left(\dfrac{d\vec{r}_k}{dq},\dfrac{d\vec{r}_k}{dq}\right)$– q bagly funksiýa. $F(q)$ funksiýany Makloreniň hataryna dargadyp alarys:

$$F(q)=F(0)+F'(0)\cdot q+...$$

T ululygy $\dot{q}^2$ takyklykda kesgitlemelidigi sebäpli bu hatardan diňe $F(0)$ goşulyjyny galdyrmaly. Onda:

$$T=\frac{1}{2}a\cdot\dot{q}^2, \tag{53.2}$$

bu ýerde $a=F(0)$. Elbetde, $a>0$. Bu ululyga *inersiýa koeffisiýenti* diýilýär. Inersiýa koeffisiýentiniň ölçeg birligi q umumylaşdyrylan koordinatanyň ölçeg birligine bagly.

$\Pi(q)$funksiýany hatara dargadyp$\left(\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0=0\right)$,$q^2$ takyklykda taparys:

$$\Pi(q)=\Pi(0)+\frac{1}{2}cq^2, \tag{53.3}$$

bu ýerde, $c=\left(\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0$; şeýlelikde, şert boýunça $c>0$ (§52). C ululyga *kwazimaýyşgaklyk koeffisiýenti* (ýa-da umumylaşdyrylan gatylyk koeffisiýenti) diýilýär.

(53.2) we (53.3) deňliklerden taparys:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q} \ , \ \frac{\partial T}{\partial q} = 0 \ , \ \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq$$

Bu ululyklary (53.1) deňlemede goýup, sistemanyň kiçi erkin yrgyldylarynyň differensial deňlemesini alarys:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 \ , \tag{53.4}$$

bu ýerde $k^2 = \frac{c}{a}$. Alnan deňleme material nokadyň gönüçyzykly erkin yrgyldylarynyň deňlemesi bilen gabat gelýär (33.2). Bu deňlemäniň umumy çözüwi

$$q = A\sin(kt + \alpha) \tag{53.5}$$

görnüşlidir. A, α hemişelikler başlangyç şertlerden kesgitlenýär. Yrgyldylaryň ýygylygy we periody

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} \ , \ \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \tag{53.6}$$

deňlikler bilen tapylýar.

Sistemanyň nokadynyň $\vec{r}_k(q)$ radius-wektoryny Makloreniň hataryna dargadyp alarys:

$$\vec{r}_k(q) = \vec{r}_k(0) + \vec{r}_k^{\,/}(0)q + \ldots$$

Bu deňlikde q-nyň ululygyny (53.5)-den alyp, birinji tertipli kiçi ululyklar takyklykda taparys:

$$\left|\vec{r}_k(q) - \vec{r}_k(0)\right| = \left|\vec{r}_k^{\,/}(0)\right| \cdot A\sin(kt + \alpha) \quad k = \overline{1, n} \tag{53.7}$$

Şeýlelik bilen, sistemanyň nokatlary hem k ýygylykly, $\left|\vec{r}_k^{\,/}(0)\right| \cdot A$ amplitudaly kiçi yrgyldylary amala aşyrýar.

Alnan netijelerden sistemanyň kiçi yrgyldylarynyň häsiýetleri gelip çykýar.

1. Sistemanyň erkin yrgyldylary garmoniki yrgyldylardyr. Bu yrgyldylaryň ýygylygy we periody başlangyç şertlere bagly däl we (53.6) formula bilen kesgitlenýärler.

2. A, α hemişelikleriň başlangyç şertlere baglydygy sebäpli sistemanyň $A \cdot \left|\vec{r}_k^{\,/}(0)\right|$ amplitudalary hem başlangyç şertlere bagly.

3. (53.7) deňlikden görnüşi ýaly, sistemanyň nokatlary islendik wagt pursatynda bir fazada $(kt + \alpha)$ bolýarlar. Diýmek, deňagramlyk ýagdaýdan bir wagtda geçýärler we deňagramlykdan maksimal gyşarmasyna birbada ýetýärler.

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Öňki paragrafda seredilen mysaldaky sterženiň kiçi yrgyldylarynyň ýygylygyny we periodyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Sterženiň kinetik energiýasy, $T = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2$. Diýmek,

$$F(q) = F(\varphi) = I_A = \frac{1}{3} m l^2 = const \, .$$

Onda $a = \frac{1}{3} m l^2$,

$$C = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_0 = (C_1 + C_2) \cdot h^2 - mg\frac{l}{2} \ .$$

Bu ýerden (53.6) formulany ulanyp alarys:

$$k = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{6(C_1 + C_2)\cdot h^2 - mgl}{2m}} \quad , \quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi l\sqrt{\frac{2m}{6(C_1 + C_2)\cdot h^2 - mgl}}\ .$$

§54. Erkinlik derejesi bire deň mehaniki sistemanyň togtaýan we mejbury kiçi yrgyldylary.

1. **Togtaýan yrgyldylar.**
2. **Mejbury yrgyldylar.**

Geçen paragrafdaky ýaly mehaniki sistemanyň deňagramlyk ýagdaýynda $q = 0$ diýip kabul edeliň.

54.1. Togtaýan yrgyldylar.

Goý, deňagramlykdan çykarylan mehaniki sistemanyň nokatlaryna potensial güýçlerden daşary

$$\vec{F}_k = -\mu_k \cdot \vec{\upsilon}_k = -\mu_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = -\mu_k \frac{d\vec{r}_k}{dq}\cdot \dot{q}$$

dissipatiw garşylyk güýçler täsir edýän bolsun. Umumylaşdyrylan dissipatiw güýji kesgitläliň.

$$dA = \sum dA_{F_k} = \sum\left(\vec{F}_k , \delta\vec{r}_k\right) = \sum\left(-\mu_k \frac{d\vec{r}_k}{dq}\cdot \dot{q} , \frac{d\vec{r}_k}{dq}\cdot \delta q\right) = \left[\sum\left(-\mu_k \frac{d\vec{r}_k}{dq}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)\right]\cdot \dot{q}\cdot \delta q =$$

$$= \left[\sum -\mu_k \cdot \left(\frac{d\vec{r}_k}{dq}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)\right]\cdot \dot{q}\cdot \delta q = F(q)\cdot \dot{q}\cdot \delta q$$

Bu ýerde $F(q) = \sum -\mu_k \cdot \left(\frac{d\vec{r}_k}{dq}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)$. $F(q)$ funksiýany Makloreniň hataryna dargadyp alarys:

$$F(q) = F(0) + F'(0)\cdot q + \frac{F''(0)}{2}\cdot q^2 + \dots$$

Yrgyldylaryň kiçidigi sebäpli diňe birinji goşulyjyny alalyň. Onda $F(0) = -\mu$ belgilemäni girizip,

$$dA_{F_k} = -\mu \cdot \dot{q}\cdot \delta q \qquad (\mu = const)$$

deňligi alarys. Bu ýerden umumylaşdyrylan dissipatiw güýç

$$Q_d = -\mu \cdot \dot{q} \tag{54.1}$$

bolar.

Indi Lagranžyň ikinji görnüşli deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q_d \tag{54.2}$$

Bu deňlemede T-niň, Π-niň bahalaryny öňki paragrafdaky (53.2) we (53.3) formulalardan, Q_d-niň bahasyny (54.1) formuladan alyp, (54.2) deňlemede ýerine goýsak, togtaýan yrgyldylaryň differensial deňlemesini alarys:

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = 0, \qquad (54.3)$$

bu ýerde $\frac{\mu}{a} = 2b$, $\frac{c}{a} = k^2$. Alnan (54.3) deňleme §33-de getirilen (33.10) deňleme bilen gabat gelýär. Diýmek, §33-de material nokat üçin alnan netijeler erkinlik derejesi bire deň mehaniki sistema üçin hem ýerine ýetýär.

Şeýlelik bilen:

a) $k > b$ bolanda sistema $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ ýygylykly, $\tau = \frac{2\pi}{k_1}$ periodly togtaýan yrgyldyly hereket edýär.

b) $k \le b$ bolanda sistemanyň hereketi yrgyldyly häsiýete eýe bolanok.

54.2. Mejbury yrgyldylar.

Goý, mehaniki sistemanyň nokatlaryna birinji bölümçede görkezilen güýçlerden daşary $\vec{F}_k = \vec{F}_{k_0}\sin(pt)$ gozgaýjy güýçler täsir edýän bolsun. Umumylaşdyrylan gozgaýjy güýji kesgitläliň.

$$dA = \sum dA_{F_k} = \sum\left(\vec{F}_k, \delta\vec{r}_k\right) = \sum\left(\vec{F}_{k_0}\sin(pt), \delta\vec{r}_k\right) = \sum \sin(pt)\cdot\left(\vec{F}_{k_0}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\cdot\delta q\right) =$$

$$= \sum \sin(pt)\cdot\left(\vec{F}_{k_0}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)\cdot\delta q = \sin(pt)\cdot\left(\sum\left(\vec{F}_{k_0}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)\right)\cdot\delta q = F(q)\cdot\sin(pt)\cdot\delta q$$

Bu ýerde $F(q) = \sum\left(\vec{F}_{k_0}, \frac{d\vec{r}_k}{dq}\right)$.

Ýokarda ýerine ýetirilişi ýaly, $F(q)$ funksiýany Makloreniň hataryna dargadyp, diňe birinji goşulyjyny alyp (kiçi yrgyldylardygy sebäpli) taparys:

$$\sum dA_{F_k} = F(0)\sin(pt)\cdot\delta q$$

Diýmek, gozgaýjy umumylaşdyrylan güýç

$$Q_g = Q_0 \sin(pt) \qquad (54.4)$$

görnüşli bolar, bu ýerde, $Q_0 = F(0)$. Netijede Lagranžyň deňlemesi düzülende (54.2) deňlemäniň sag bölegine Q_g güýç goşular we

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + k^2 q = P_0 \sin(pt) \qquad (54.5)$$

deňleme alnar; bu ýerde $P_0 = \frac{Q_0}{a}$.

(54.5) deňleme 33-nji paragrafda alnan (33.19) deňleme bilen gabat gelýär. Diýmek, 33-nji paragrafda nokat üçin getirilen netijeler erkinlik derejesi bire deň mehaniki sistema üçin hem ýerine ýetýär.

§55. Erkinlik derejesi ikä deň mehaniki sistemanyň kiçi yrgyldylary.

Erkinlik derejesi birden köp bolan mehaniki sistemanyň kiçi yrgyldylary amaly ähmiýeti bolup, erkinlik derejesi bire deň sistemanyň yrgyldylaryndan käbir tapawutlary bar.

Goý, sistema q_1, q_2 umumylaşdyrylan koordinatalar bilen kesgitlenip, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ ýagdaýda sistema durnukly deňagramlykda bolsun.

Kinetik we potensial energiýany kiçi ululyklaryň $(q_i, \dot{q}_i, i = 1,2)$ ikinji derejesine çenli takyklykda kesgitläliň:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k \upsilon_k^2 = \frac{1}{2}\sum m_k \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}, \frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_k \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right)\cdot \dot{q}_1^2 + 2\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\right)\cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\right)\cdot \dot{q}_2^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F_1(q_1, q_2)\cdot \dot{q}_1^2 + 2F_{12}(q_1, q_2)\cdot \dot{q}_1\dot{q}_2 + F_2(q_1, q_2)\cdot \dot{q}_2^2\right],$$

bu ýerde

$$F_1(q_1, q_2) = \sum m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right),$$

$$F_{12}(q_1, q_2) = \sum m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\right),$$

$$F_2(q_1, q_2) = \sum m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\right)$$

Ikinji derejeli takyklyk gerekligi sebäpli F_1, F_{12}, F_2 funksiýalaryň Makloreniň hataryna dargadylyşynda diňe birinji agzalaryny alyp taparys:

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right), \tag{55.1}$$

bu ýerde $a_{11} = F_1(0,0)$, $a_{12} = F_{12}(0,0)$, $a_{22} = F_2(0,0)$ *inersiýa koeffisiýentler* diýlip atlandyrylýan ululyklar.

Sistemanyň $\Pi = \Pi(q_1, q_2)$ potensial energiýasyny Makloreniň hataryna dargadyp (ikinji derejä çenli takyklykda) taparys:

$$\Pi(q_1, q_2) = \Pi(0,0) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}(0,0)\cdot q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}(0,0)\cdot q_2 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}(0,0)\cdot q_1^2 + 2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}(0,0)\cdot q_1 q_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}(0,0)\cdot q_2^2\right]$$

Elbetde, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}(0,0) = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}(0,0) = 0$, sebäbi durnukly deňagramlykda potensial energiýa minimuma eýe bolýar. Onda

$$\Pi(q_1, q_2) = \Pi(0,0) + \frac{1}{2!}\left(c_{11}\cdot q_1^2 + 2c_{12}\cdot q_1 q_2 + c_{22}\cdot q_2^2\right), \tag{55.2}$$

bu ýerde $c_{11}=\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}(0{,}0)$, $c_{12}=\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial q_1\partial q_2}(0{,}0)$, $c_{22}=\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial q_2^2}(0{,}0)$

kwazimaýyşgak koeffisiýentler diýlip atlandyrylýan hemişelikler. Tapylan kinetik we potensial energiýalary

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_1}+\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0\ ,\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_2}+\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0\ .\end{cases}$$

Lagranžyň deňlemelerinde goýup taparys:

$$\begin{cases}a_{11}\ddot q_1+a_{12}\ddot q_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0\ ,\\ a_{12}\ddot q_1+a_{22}\ddot q_2+c_{12}q_1+c_{22}q_2=0\ .\end{cases}\tag{55.3}$$

Alnan differensial deňlemeler sistemasynyň çözüwini

$$\begin{cases}q_1=A\sin(kt+\alpha)\\ q_2=B\sin(kt+\beta)\end{cases}\tag{55.4}$$

görnüsde gözläliň. A, B, k, α-erkin hemişelikler. q_1, q_2 funksiýalaryň ikinji tertipli önümlerini hasaplalyň:

$$\dot q_1=Ak\cos(kt+\alpha)\ ,\ \ \ddot q_1=-Ak^2\sin(kt+\alpha)$$

$$\dot q_2=Bk\cos(kt+\alpha)\ ,\ \ \ddot q_2=-Bk^2\sin(kt+\alpha)$$

$q_1, q_2, \ddot q_1, \ddot q_2$ ululyklary (55.3) deňlikde goýup, $\sin(kt+\alpha)$-a gysgaldyp, A we B ululyklar üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases}(c_{11}-a_{11}k^2)A+(c_{12}-a_{12}k^2)B=0\\ (c_{12}-a_{12}k^2)A+(c_{22}-a_{22}k^2)B=0\end{cases}\tag{55.5}$$

(55.5) deňlemeler sistemasynyň $A=0, B=0$ triwial çözüwinden başga çözüwiniň bolmagy üçin bu sistemanyň kesgitleýjisi nola deň bolmaly ýa-da başgaça aýdylanda, *A* we *B*-niň koeffisiýentleri proporsional bolmaly:

$$(c_{11}-a_{11}k^2)\cdot(c_{22}-a_{22}k^2)-(c_{12}-a_{12}k^2)^2=0\tag{55.6}$$

(55.6) deňlemäniň (bikwadrat deňleme) kökleri k_1^2, k_2^2 hakyky we položitel (matematika nukdaý nazaryndan subut edilýär) sanlar.

k_1, k_2 ululyklar tapylandan soň (55.3) deňlemeler sistemasynyň (55.4) görnüşli hususy çözüwiniň ikisini taparys:

$$q_1^{(1)}=A_1\sin(k_1t+\alpha_1)\ ,\ \ q_2^{(1)}=B_1\sin(k_1t+\alpha_1)\tag{55.7}$$

$$q_1^{(2)}=A_2\sin(k_2t+\alpha_2)\ ,\ \ q_2^{(2)}=B_2\sin(k_2t+\alpha_2)\tag{55.8}$$

(55.7) we (55.8) deňlemeler bilen kesgitlenýän yrgyldylara *baş yrgyldylar* diýilýär. Şeýlelikde, k_1, k_2 sanlara sistemanyň hususy ýygylyklary diýilýär.

(55.5) deňlemeden alarys:

$$\frac{B}{A}=-\frac{c_{11}-a_{11}k^2}{c_{12}-a_{12}k^2}=n\tag{55.9}$$

ýa-da $B = An$. n sana kiçi yrgyldylaryň *forma koeffisiýenti* diýilýär. (55.9) deňligi ulansak, (55.7) we (55.8) deňlemelerden alarys:

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \ , \ q_2^{(1)} = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \ , \qquad (55.10)$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \ , \ q_2^{(2)} = n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \ . \qquad (55.11)$$

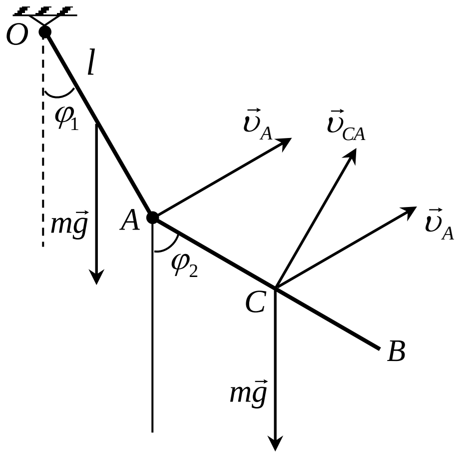
(55.3) sistema girýän deňlemeleriň çyzykly deňlemelerdigi sebäpli (55.10) we (55.11) hususy çözüwleriň jemi hem (55.3) deňlemeler sistemasynyň çözüwi bolýar:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \\ q_2 = n_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + n_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{cases} \qquad (55.12)$$

Başlangyç şertlerden kesgitlenýän $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ hemişelikleri saklaýan (55.12) deňlik (55.3) deňlemäniň umumy çözüwidir.

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Massalary m, uzynlyklary l bolan birmeňzeş *OA*, *OB* sterženleriň emele getirýän ikeldilen fiziki maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň hususy ýygylyklaryny we forma koeffisiýentlerini kesgitlemeli.



55.1-nji surat

Umumylaşdyrylan koordinatalar hökmünde sterženleriň wertikal bilen emele getirýän φ_1, φ_2 burçlaryny alalyň. Onda seredilýän mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{10}\dot{\varphi}_1^2 + m\upsilon_C^2 + I_{2C}\dot{\varphi}_2^2\right) \qquad (*)$$

bolar, bu ýerde $I_{10} = \frac{1}{3}ml^2$-birinji sterženiň O nokada görä inersiýa momenti, $I_{2C} = \frac{1}{12}ml^2$-ikinji sterženiň massalar merkezine görä inersiýa momenti

Tekiz hereket edýän *AB* sterženiň massalar merkezi bolan *C* nokat üçin tizlikler meýilnamasyny ulanyp taparys: $\vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{CA}$. Bu ýerden

$$\upsilon_C^2 = \upsilon_A^2 + \upsilon_{CA}^2 + 2\upsilon_A \cdot \upsilon_{CA} \cdot \cos\left(\vec{\upsilon}_A \ \widehat{,} \ \vec{\upsilon}_{CA}\right) = (l \cdot \dot{\varphi}_1)^2 + \left(\frac{l}{2} \cdot \dot{\varphi}_2\right)^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \dot{\varphi}_2 \times$$

$$\times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = [\varphi_2 - \varphi_1 \approx 0 \Rightarrow \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 1] = l^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}_2^2 + l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Netijede (*) deňlikden alarys:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{3}\dot{\varphi}_2^2+\dot{\varphi}_1^2\varphi_2^2\right)ml^2 \qquad (**)$$

Mehaniki sistemanyň potensial energiýasy

$$\Pi=-\frac{1}{2}mgl\cos\varphi_1-mgl\left(\cos\varphi_1+\frac{1}{2}\cos\varphi_2\right)$$

bolar ýa-da $\cos\varphi=1-\dfrac{\varphi^2}{2}$ deňligi ulanyp alarys:

$$\Pi=\Pi_0+\frac{1}{2}mgl\left(\frac{3\varphi_1^2}{2}+\frac{\varphi_2^2}{2}\right), \qquad (***)$$

$\Pi_0=const$. (**), (***) deňliklerden (55.1), (55.2) formulalaryň esasynda

$$a_{11}=\frac{4}{3}ml^2\ ,\ a_{12}=\frac{ml^2}{2}\ ,\ a_{22}=\frac{ml^2}{3}\ ,$$

$$c_{11}=\frac{3}{2}mgl\ ,\ c_{12}=0\ ,\ c_{22}=\frac{1}{2}mgl$$

bolýandygyny göreris. Bu ululyklary (55.6) ýygylyklar deňlemesinde goýup, käbir ýönekeý özgertmelerden soň

$$k^4-6k^2\left(\frac{g}{l}\right)+\frac{27}{7}\left(\frac{g}{l}\right)^2=0$$

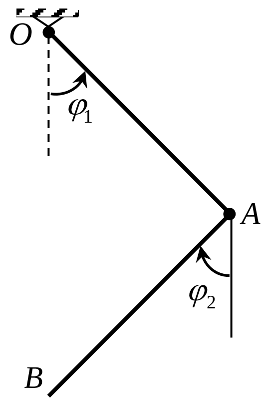
deňlemäni alarys. Alnan deňlemäniň kökleri $k_{1,2}^2=3\left(2\pm\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)\dfrac{g}{l}$ deňligi kanagatlandyrýarlar.

Bu ýerden

$$k_1=0{,}86\sqrt{\frac{g}{l}}\ ,\quad k_2=2{,}3\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Tapylan ýygylyklary (55.9) formulada goýup, $n_1=1{,}43$, $n_2=-2{,}1$ bolýandygyny göreris.

Şeýlelik bilen, birinji baş yrgyldylarda sterženleriň ikisi hem wertikaldan bir tarapa gyşarýar (55.1-nji surat) we $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}=1{,}43$. Ikinji baş yrgyldylarda sterženler dürli tarapa gyşarýar (55.2-nji surat) we $\left|\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right|=2{,}1$.



55.2-nji surat

14-nji BAP
Urgy nazaryýetiniň esaslary.
§56. Urgy nazaryýetiniň esasy deňlemesi.

Adaty güýçleriň täsirinde hereket edýän jisimiň nokatlarynyň tizlikleri üznüksiz üýtgeýär, ýagny wagtyň tükeniksiz kiçi artdyrmasyna tizligiň tükeniksiz kiçi artdyrmasy degişli bolup durýar. Hakykatdan hem, jisimiň nokadyna täsir edýän $\vec{F}_k$ güýjüň τ wagtyň dowamyndaky impulsyny $\vec{F}_k^{orta} \cdot \tau$ görnüşde ýazsak, onda material nokadyň $\vec{F}_k$ güýçleriň täsirinde hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany

$$m(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0) = \sum \vec{F}_k^{orta} \cdot \tau$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde $\vec{F}_k^{orta}$ - $\vec{F}_k$ güýjüň ortaça bahasy. Bu ýerden görnüşi ýaly, τ nola ymtylanda $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0$ ululyk hem nola ymtylýar. Emma täsir edýän güýçleriň içinde ululygy boýunça örän ululary ($\frac{1}{\tau}$ tertipde) bolsa, onda tizligiň artdyrmasy nol däl çäkli ululyk bolar.

Eger tükeniksiz kiçi wagtyň dowamynda jisimiň nokatlarynyň tizlikleri çäkli ululyga üýtgeýän bolsa, onda bu hadysa **urgy** diýilýär. Urguda ýüze çykýan $\vec{F}_k^{urgy}$ güýçlere **urgy güýçleri** diýilýär. Urgynyň bolup geçýän τ wagtyna **urgy wagty** diýilýär.

Urgy güýçleriniň ägirt uludyklary sebäpli urgy nazaryýetinde jisimleriň özara täsirleriniň ölçegi hökmünde urgy güýçleriniň özleri däl-de, olaryň impulslary kabul edilýär.

Urgy impulsy, ýagny $\vec{S}_{urgy} = \int_0^{\tau} \vec{F}_{urgy}\, dt = \vec{F}_{urgy}^{orta} \cdot \tau$ ululyk çäkli ululyk bolup durýar. Urgy däl güýçleriň τ wagtyň dowamyndaky impulslary ujypsyz ululyklar bolup, olary göz öňünde tutmak hökman däl.

Nokadyň urga çenli tizligini $\vec{\upsilon}$ bilen, urgudan soňky tizligini $\vec{u}$ bilen belgiläliň. Onda nokadyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema

$$m(\vec{u} - \vec{\upsilon}) = \sum \vec{S}_k \tag{56.1}$$

görnüşe eýe bolar, ýagny nokadyň hereket mukdarynyň käbir wagtyň dowamynda üýtgemegi urgy impulslarynyň jemine deň. (56.1) deňleme urgy nazaryýetiniň **esasy deňlemesi** bolup durýar. Urgy wagtynyň dowamynda nokadyň $\vec{\upsilon}^{orta} \cdot \tau$ orunüýtgetmesi ujypsyz ululyk bolup durýar.

Ýokarda agzalanlary jemläp ýazalyň:

1. Urguda urgy däl güýçleriň (meselem, agyrlyk güýji) täsirlerini göz öňünde tutmak hökman däl;
2. urgy hadysasynda nokatlaryň orunüýtgetmeleri ujypsyz bolup, nokatlary gozganmaýan nokatlar hökmünde kabul edip bolýar;
3. jisimiň nokatlarynyň tizlikleriniň urgy wagtynda üýtgemegi esasy (56.1) deňleme bilen kesgitlenýär.

§57. Urgy nazaryýetiniň umumy teoremalary.

1. **Urguda mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.**
2. **Urguda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň baş momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema (momentler teoremasy).**

57.1. Urguda mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

37-nji paragrafyň (37.6) formulasy urgy hadysasynda hem saklanýar. Emma adaty güýçleriň impulslary ujypsyz bolandygy sebäpli ýokarda agzalan formula

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e \tag{57.1}$$

görnüşe eýe bolar, ýagny mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň urgy wagtynyň dowamynda üýtgemegi daşky urgy impulslarynyň wektorlaýyn jemine deň.
x okuna proýeksiýada (57.1) formula

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e \tag{57.2}$$

görnüşe eýe bolar. Eger daşky urgy impulslarynyň wektorlaýyn jemi nola deň bolsa, onda (57.1) formuladan görnüşi ýaly, sistemanyň hereket mukdary urgy wagtynda üýtgemeýär.

57.2. Urguda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň baş momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema (momentler teoremasy).

28-nji paragrafda getirilen nokadyň hereket mukdarynyň momenti hakyndaky teorema urgy hadysasy üçin başga görnüşe eýe bolar. Bu ýagdaý urguda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň orunüýtgetmeleri göz öňünde tutulmaýandygy bilen düşündirilýär.

m_k massaly nokada täsir edýän daşky urgy impulslarynyň deňtäsiredijisini $\vec{S}_k^e$ bilen, içki urgy impulslarynyň deňtäsiredijisini $\vec{S}_k^i$ bilen belgiläliň. Onda öňki paragrafyň (56.1) formulasy boýunça $m_k(\vec{u}_k - \vec{\upsilon}_k) = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i$ ýa-da $m_k \cdot \vec{u}_k - m_k \cdot \vec{\upsilon}_k = \vec{S}_k^e + \vec{S}_k^i$ deňligi alarys. Bu deňlige girýän wektorlar gozganmaýan nokada goýlan. Onda bu wektorlaryň haýsy hem bolsa bir O merkeze görä momentlerini alsak, Warinýonyň teoremasynyň esasynda

$$\vec{m}_0(m_k \cdot \vec{u}_k) - \vec{m}_0(m_k \cdot \vec{\upsilon}_k) = \vec{m}_0(\vec{S}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{S}_k^i)$$

deňligi alarys. Bu deňligi mehaniki sistemanyň ähli nokatlary üçin düzüp, agzama-agza goşsak,

$$\sum \vec{m}_0(m_k \cdot \vec{u}_k) - \sum \vec{m}_0(m_k \cdot \vec{\upsilon}_k) = \sum \vec{m}_0(\vec{S}_k^e) + \sum \vec{m}_0(\vec{S}_k^i)$$

deňlige geleris. Bu deňligiň çep böleginde duran jemler mehaniki sistemanyň nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň O nokada görä degişlilikde urgudan soňky we öňki baş mometlerine deň. Baş momentleri $\vec{K}_1$ we $\vec{K}_0$ bilen belgiläp, şeýle-de, içki urgy güýçleriniň impulslarynyň jeminiň nola deňdigini (içki güýçleriň häsiýetinden) göz öňünde tutup,

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{57.3}$$

formulany alarys, ýagny urgynyň dowamynda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň käbir merkeze görä baş momentiniň üýtgemegi daşky urgy impulslarynyň şol merkeze görä momentleriniň jemine deň. (57.3) formula x oky boýunça

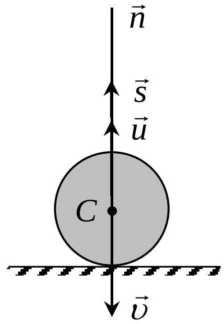
$$K_{1x} - K_{0x} = \sum m_x\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{57.3$'$}$$

görnüşde bolar. Alnan (57.3), (57.3$'$) formulalardan görnüşi ýaly, eger daşky urgy impulslarynyň käbir merkeze (oka) görä momentleriniň jemi nola deň bolsa, onda mehaniki sistemanyň nokatlarynyň hereket mukdarlarynyň bu merkeze (oka) görä baş momenti urgy wagtynda üýtgemeýär. Içki urgy impulslary sistemanyň hereket mukdarlarynyň baş momentini üýtgedenok.

§58. Urguda dikeldiji koeffisiýent.

Urgy hadysasynda ýüze çykýan urgy impulsynyň ululygy diňe bir urulýan jisimleriň massalaryna we urgudan öňki tizliklerine bagly bolman, jisimleriň maýyşgak häsiýetlerine-de bagly. Bu häsiýetler urguda **dikeldiji koeffisýent** diýlip atlandyrylýan ululyk bilen aýdyňlaşdyrylýar.

Gorizontal gaty plitanyň üstüne wertikal göni gaçýan şara seredeliň (58.1-nji surat)



58.1-nji surat

Şeýlelikde, göni urgy hadysasyny iki tapgyra bölüp bolýar:

I tapgyrda urga çenli şaryň nokatlarynyň tizlikleri käbir υ ululykdan (şaryň hereketi öňe bolan hereket) nola çenli kemelýär. Şar deformirlenýär we onuň $\frac{m\upsilon^2}{2}$ kinetik energiýasy deformirleme içki potensial energiýasyna öwrülýär.

II tapgyrda içki güýçleriň (maýyşgak güýçler) täsirinde şar formasyny dikeldýär. Şeýlelikde, içki potensial energiýa kinetik energiýa geçýär.

Urgynyň soňunda şaryň nokatlarynyň tizlikleri käbir u ululyk bolup, kinetik energiýasy $\frac{mu^2}{2}$-a deň.

Emma şaryň doly mehaniki energiýasy dikelmeýär. Sebäbi energiýanyň bir bölegi şaryň deformasiýasynyň galyndysynyň emele getirilmegine we şaryň gyzdyrylmagyna sarp edilýär. Şu sebäpli $u < \upsilon$.

Kesgitleme. Jisimiň gozganmaýan jisime göni urgusyndan soňky tizliginiň urgudan öňki tizligine bolan gatnaşygyna, ýagny

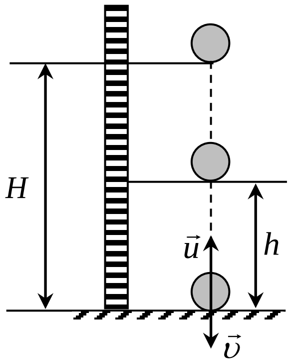
$$k = \frac{u}{\upsilon} \qquad (58.1)$$

ululyga **urguda dikeldiji koeffisiýent** diýilýär.

Bellik. Dikeldiji koeffisiýent tejribe arkaly kesgitlenýär. υ tizlik uly bolmadyk çäklerde üýtgände k ululyk diňe urulýan jisimleriň materialyna bagly. Absolýut maýyşgak urguda $(k = 1)$ jisimiň kinetik energiýasy doly dikelýär. Absolýut maýyşgak däl urguda $(k = 0)$ urgy hadysasy I tapgyrda tamamlanýar we jisimiň kinetik energiýasy jisimiň deformasiýasyna we gyzdyrylmagyna sarp edilýär.

Urguda dikeldiji koeffisiýentini aşakda görkezilen tejribe arkaly kesgitläp bolar.

H beýiklikden gaçýan şaryň urgudan soň ýokary çykjak h beýikligi wertikal duran reýkanyň (58.2-nji surat) kömegi bilen kesgitlenýär.



58.2-nji surat

Kinetik energiýanyň üýtgemegi hakyndaky teoremadan alarys:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mgH \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2g \cdot H}\ ,$$

$$0 - \frac{mu^2}{2} = -mgh \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2g \cdot h}\ .$$

Bu ýerden $k = \frac{u}{\upsilon} = \sqrt{\frac{h}{H}}$.

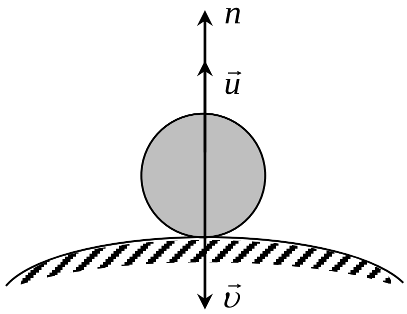
Bellik. Dürli materiallar üçin urguda dikeldiji koeffisiýent ýörite edebiýatlarda getirilen. Meselem, $3\frac{m}{sek}$ tizlikli gaçýan “agajyň-agaja” urgusynda dikeldiji koeffisiýent $k \approx 0{,}5$; “aýnanyň-aýna” urgusynda $k \approx 0{,}94$; “poladyň-polada” urgusynda $k \approx 0{,}56$.

§59. Gozganmaýan üste bolan urgy.

Gozganmaýan üste urulýan M massaly jisime (şar) seredeliň. Üstüň reaksiýasy-jisime goýlan urgy güýji bolup durýar. Bu güýjüň urgy wagtyndaky impulsyny $\vec{S}$ bilen belgiläliň. Goý, üstüň normaly jisimiň massalar merkezinden geçýän bolsun (şar üçin hemişe şeýle). Şunda urga **merkezi urgy** diýilýär.

Eger jisimiň massalar merkeziniň urga çenli $\vec{\upsilon}$ tizligi üstüň normaly boýunça ugrukdyrylan bolsa, onda urga göni urgy, başga ýagdaýda, gyýtak urgy diýilýär.

1. Göni urgy.



59.1-nji surat

57-nji paragrafdaky (57.3) formulany $\vec{n}$ normal ugra proýektirläp, şunlukda $\vec{k}_0 = M\vec{\upsilon}$, $\vec{k}_1 = M\vec{u}$ deňlikleri göz öňünde tutup taparys:

$$M(u_n - \upsilon_n) = S_n$$

Emma urgynyň gönüdigi sebäpli, $u_n = u$, $\upsilon_n = -\upsilon$, $S_n = S$. Onda $M(u+\upsilon) = S$. Bu deňlikden $u = k\upsilon$ deňligi ulanyp, $S = M(1+k)\cdot \upsilon$ aňlatmany taparys. Görnüşi ýaly, urguda dikeldiji koeffisiýent uly boldugyça urgy impulsy şonça ulalýar. Urgy güýjüniň ortaça bahasyny kesgitlemek üçin urgynyň τ wagtyny bilmeli.

Meselem, $m = 1\,kg$ massaly şar $H = 5m$ beýiklikden polat plitanyň üstüne $(k = 0{,}56)$ gaçanda, $\upsilon = \sqrt{2gh} \approx 9{,}9\dfrac{m}{sek}$ tizlik bilen gaçýar we $u = k\upsilon = 5{,}54\dfrac{m}{sek}$.

Urgy impulsy:

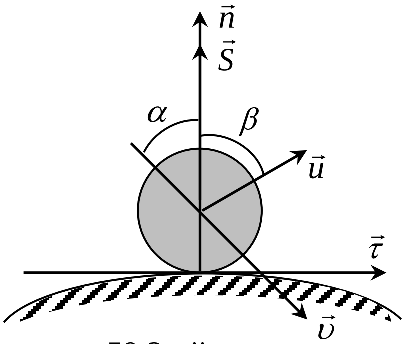
$$S = m(1+k)\cdot \upsilon \approx 15{,}44 N \cdot sek$$

Eger urgy wagty $\tau \approx 0{,}0005\,sek$ bolsa, onda plitanyň reaksiýasynyň ortaça ululygy

$$N^{orta}_{urgy} = \frac{S}{\tau} = 30880\,N\text{-a}$$

deň bolar.

2. Gyýtak urgy.



59.2-nji surat

Goý, jisimiň massalar merkeziniň urgudan öňki tizligi normal bilen α burçy, urgudan soň β burçy emele getirýän bolsun. Onda (57.3) formula $\vec{\tau}$ galtaşýana we $\vec{n}$ normala proýeksiýalary

$$M(u_\tau - \upsilon_\tau) = 0 \quad , \quad M(u_n - \upsilon_n) = S$$

görnüşe eýe bolar. Bu ýagdaýda dikeldiji koeffisiýent $\dfrac{|u_n|}{|\upsilon_n|}$-a deň, sebäbi urgy normal boýunça bolup geçýär (sürtülme göz öňünde tutulanok). $\vec{u}_n = -k\vec{\upsilon}_n$ deňligi ulanyp, netijede taparys:

$$u_\tau = \upsilon_\tau \quad , \quad S = M\cdot \upsilon_n \cdot (1+k)$$

Eger M, υ, α we k ýaly ululyklar belli bolsa, urgudan soňky tizligiň ugruny we ululygyny hem-de urgy impulsyny kesgitläp bolar.

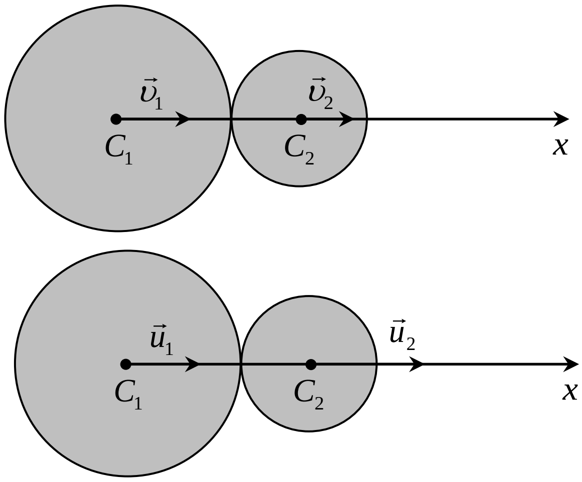
$\upsilon_\tau = \upsilon_n \cdot tg\alpha$, $u_\tau = u_n \cdot tg\beta$ deňlikleri göz öňünde tutup, $u_n \cdot tg\beta = \upsilon_n \cdot tg\alpha$ deňligi alarys, bu ýerden $k = \frac{u_n}{\upsilon_n} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$. Diýmek, gyýtak urguda dikeldiji koeffisiýent düşme burçunyň tangensiniň serpikme burçunyň tangensine gatnaşygyna deň.

$k < 1$ deňsizlikden $\alpha < \beta$ deňsizlik alynýar, ýagny düşme burçy serpikme burçundan kiçi.

§60. Iki jisimiň göni merkezi urgusy.

Eger iki sany urulýan jisimiň umumy normaly (çaknyşma nokadynda) olaryň massalar merkezlerinden geçýän bolsa, şeýle-de, jisimleriň massalar merkezleriniň urgudan öňki tizlikleri bu normal boýunça ugrukdyrylan bolsa, onda bu urga **göni merkezi urgy** diýilýär. Meselem, merkezleri bir göni çyzyk boýunça hereket edýän iki sany birjynsly şarlaryň urgusy göni merkezi urgydyr.

Goý, massalary M_1, M_2 bolan şarlaryň merkezleriniň urgudan öňki tizlikleri degişlilikde $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$, urgudan soňky tizlikleri bolsa $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ bolsun. Şarlaryň C_1, C_2 massalar merkezlerinden C_1x koordinata okuny geçireliň (60.1-nji surat)



60.1-nji surat

Elbetde, urgynyň bolup geçmegi üçin $\upsilon_{1_x} > \upsilon_{2_x}$ bolmaly we $u_{1_x} < u_{2_x}$ bolmaly (uran jisim urlan jisimden öňe geçip bilmez). $M_1, M_2, \upsilon_{1_x}, \upsilon_{2_x}, k$ ýaly ululyklary belli hasap edip, u_{1_x}, u_{2_x} ululyklary kesgitläliň. Munuň üçin iki şary bir mehaniki sistema hökmünde kabul edip, hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany ulanalyň. Bu ýagdaýda urgy güýçleri içki güýçler bolup durýar. Onda $\sum S_{kx}^e = 0$ (daşky güýçleriň x oky boýunça täsiri nol). Diýmek, mehaniki sistemanyň hereket mukdary üýtgemeýär, ýagny

$$M_1 \cdot u_{1_x} + M_2 \cdot u_{2_x} = M_1 \cdot \upsilon_{1_x} + M_2 \cdot \upsilon_{2_x} \qquad (60.1)$$

Iki jisim urlanda urgynyň intensiwligi (urgynyň impulsy) jisimleriň tizlikleriniň ululyklaryna bagly däl-de urýan jisimiň tizligi bilen urulýan jisimiň tizliginiň tapawudyna, ýagny $\upsilon_2 - \upsilon_1$ ululyga bagly. Şonuň üçin hem iki jisim çaknyşanda:

$$k = \left| \frac{u_{1_x} - u_{2_x}}{\upsilon_{1_x} - \upsilon_{2_x}} \right| = -\frac{u_{1_x} - u_{2_x}}{\upsilon_{1_x} - \upsilon_{2_x}} \tag{60.2}$$

ýa-da

$$u_{1_x} - u_{2_x} = -k\left(\upsilon_{1_x} - \upsilon_{2_x}\right) \tag{60.2$^/$}$$

deňlik ýerine ýetmeli.

(60.1) we (60.2$^/$) deňlemelerden düzülen deňlemeler sistemasy goýlan meseläni çözmäge mümkinçilik berýär.

Çaknyşýan jisimlere täsir edýän urgy impulsyny (56.1) formuladan kesgitläris:

$$S_{1x} = M_1\left(u_{1x} - \upsilon_{1x}\right) \quad , \quad S_{2x} = -S_{1x} \tag{60.3}$$

Käbir hususy ýagdaýlara seredip geçeliň:

1. Absolýut maýyşgak däl urgy $(k = 0)$.

Bu ýagdaýda (60.1) we (60.2) deňlemelerden

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 \cdot \upsilon_{1x} + M_2 \cdot \upsilon_{2x}}{M_1 + M_2} \tag{60.4}$$

bolýandygyny göreris. Urgudan soň jisimleriň ikisi hem deň tizlikler bilen hereket edýär. Şunlukda jisimlere täsir edýän urgy impulsy, $S_{2x} = -S_{1x} = \dfrac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\left(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}\right)$ bolar.

2. Abolýut maýyşgak urgy $(k = 1)$.

Bu ýagdaýda (60.1) we (60.2) deňlemelerden

$$\begin{cases} u_{1x} = \upsilon_{1x} - \dfrac{2M_1}{M_1 + M_2}\left(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}\right), \\ u_{2x} = \upsilon_{2x} + \dfrac{2M_1}{M_1 + M_2}\left(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}\right) \end{cases} \tag{60.5}$$

bolýandygyny alarys. Şunlukda jisimlere täsir edýän urgy impulsy

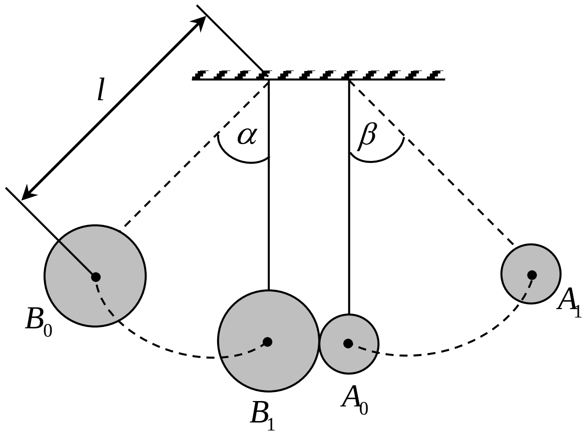
$$S_{2x} = -S_{1x} = -\frac{2M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}\left(\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}\right)$$

bolar. Görnüşi ýaly, absolýut maýyşgak urguda urgy impulsy absolýut maýyşgak urgudakydan iki esse uly.

Hususy halatda, $M_1 = M_2$ bolanda (60.5) deňlemeden $u_{1x} = \upsilon_{1x},\ u_{2x} = \upsilon_{2x}$ bolýandygyny, ýagny absolýut maýyşgak urguda deň massaly jisimleriň tizliklerini çalyşýandygyny göreris.

Bir meselä seredip geçeliň.

Mesele. Massalary M_1 we M_2 bolan iki sany şar wertikal tekizlikde çyzgyda görkezilişi ýaly asylan. Birinji şary wertikaldan α burça galdyryp, başlangyç tizliksiz goýberýärler. Urgudan soň ikinji şar wertikaldan β burça galýar. Şarlar üçin urguda dikeldiji koeffisiýenti kesgitlemeli.



60.2-nji surat

B_0B_1 aralykda kinetik energiýanyň üýgemegi hakyndaky teoremany ulanyp, birinji şaryň urgudan öňki υ_1 tizligini kesgitläliň:

$$\frac{M_1\upsilon_1^2}{2} = M_1 gl\cdot(1-\cos\alpha) = 2M_1 gl\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad .$$

Bu ýerde *l*-şaryň merkezinden asma nokada çenli uzaklyk. Bu ýerden

$$\upsilon_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Ulanylan teoremany ikinji şar üçin $A_0\,A_1$ aralykda ulanyp,

$$u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta}{2}$$

bolýandygyny göreris. Meseläniň şerti boýunça $\upsilon_2 = 0$. Onda (60.1) we (60.2) formulalardan

$$M_1\cdot u_1 + M_2\cdot u_2 = M_1\cdot\upsilon_1 \ ,$$
$$u_2 - u_1 = k\cdot\upsilon_1$$

bolýandygyny göreris. Bu deňlemelerden taparys:

$$M_1\upsilon_1(1+k) = (M_1+M_2)u_2$$

ýa-da $k = \dfrac{(M_1+M_2)\cdot u_2}{M_1\cdot\upsilon_1} - 1 = \dfrac{(M_1+M_2)\cdot\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{M_2\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} - 1$

§61. Maýyşgak däl urguda kinetik energiýanyň ýitgisi. Karnonyň teoremasy.

Maýyşgak däl urguda urulýan jisimleriň kinetik energiýasy ýitgä sezewar bolýar. Iň uly ýitgi absolýut maýyşgak däl $(k=0)$ urguda bolýar. Bu ýagdaýda ýitgini hasaplap göreliň. Urulýan jisimleriň hereketleri öňe bolan hereket bolsun. Urgudan soňky umumy tizligi *u* bilen belgiläp, sistemanyň urgudan öňki we soňky kinetik energiýasyny ýazalyň:

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{2}\left(M_1\cdot\upsilon_1^2 + M_1\cdot\upsilon_2^2\right), \\ T_1 = \dfrac{1}{2}(M_1+M_2)\cdot u^2 \end{cases} \qquad (61.1)$$

ýa-da:

$$\begin{cases} 2T_0 = M_1 \cdot \upsilon_1^2 + M_2 \cdot \upsilon_2^2 \ , \\ 2T_1 = (M_1 + M_2) \cdot u^2 \ . \end{cases}$$

(61.1/)

Ýitirilen $T_0 - T_1$ energiýany aşakda görkezilişi ýaly aňladalyň:

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1 \qquad (61.2)$$

Öňki paragrafyň (60.4) formulasyndan

$$(M_1 + M_2) \cdot u = M_1 \cdot \upsilon_1 + M_2 \cdot \upsilon_2$$

deňlik gelip çykýar. Bu ýerden

$$2T_1 = (M_1 + M_2) \cdot u^2 = (M_1 \cdot \upsilon_1 + M_2 \cdot \upsilon_2) \cdot u \qquad (61.3)$$

deňligi alarys.

(61.2) deňligiň sag bölegine T_0 we T_1 ululyklaryň ýerine olaryň (61.1) aňlatmadan bahalaryny, şeýle-de, $2T_1$-iň ýerine (61.3) deňligiň sag bölegini goýup, alarys:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}\left(M_1 \cdot \upsilon_1^2 + M_2 \cdot \upsilon_2^2 - 2M_1 \cdot \upsilon_1 \cdot u - 2M_2 \cdot \upsilon_2 \cdot u + M_1 \cdot u^2 + M_2 \cdot u^2\right)$$

ýa-da

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 \cdot (\upsilon_1 - u)^2 + \frac{1}{2} M_2 \cdot (\upsilon_2 - u)^2 \qquad (61.4)$$

$\upsilon_1 - u$, $\upsilon_2 - u$ ululyklar **ýitirilen tizlikleri** görkezýär.

(61.4) formula **Karnonyň teoremasyny** berýär:

Absolýut maýyşgak däl urguda mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň ýitgisi sistemanyň nokatlarynyň ýitirilen tizlikler bilen hereket eden halatyndaky kinetik energiýalarynyň jemine deň.

Karno Lazar Nikola (1753-1823)

Fransuz matematigi. Ylmy işleri matematiki analiz we proýektiw geometriýa bilen bagly.

Gozganmaýan jisime edilýän absolýut maýyşgak däl urga seredip geçeliň. Bu ýagdaýda $\upsilon_2 = 0$ we $T_0 = \frac{1}{2} M_1 \cdot \upsilon_1^2$ $u = \frac{M_1 \cdot \upsilon_1}{M_1 + M_2}$. Onda

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \cdot u^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 \cdot \upsilon_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 \cdot \upsilon_1^2}{2}$$

ýa-da

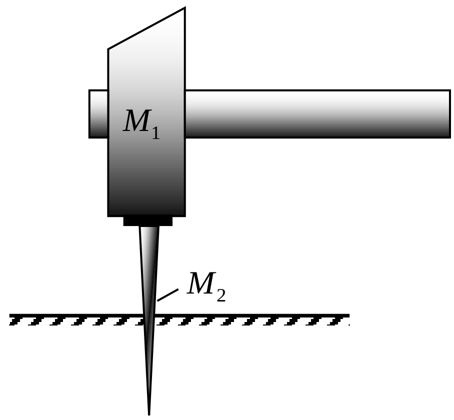
$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_0 \qquad (61.6)$$

(61.6) formula urgudan soň sistemada galýan kinetik energiýany görkezýär.
Iki sany ýagdaýa seredip geçeliň.

1. Urýan jisimiň massasy urulýan jisimiň massasyndan köp uly $M_1 >> M_2$.

Bu ýagdaýda $M_1 + M_2 \approx M_1$ diýip kabul edip bileris. (61.6) formula $T_1 \approx T_0$ bolýandygyny görkezýär. Diýmek, urgynyň absolýut maýyşgak däldigine garamazdan urguda kinetik energiýa ýitenok, sistema urgudan soň önki kinetik energiýasy bilen hereket edýär.

Amaly taýdan bu hadysany çekiç bilen çüý kakylanda (61.1-nji surat) görüp bolar. Elbetde, çekijiň massasy çüýüň massasyndan kän uly bolmaly.

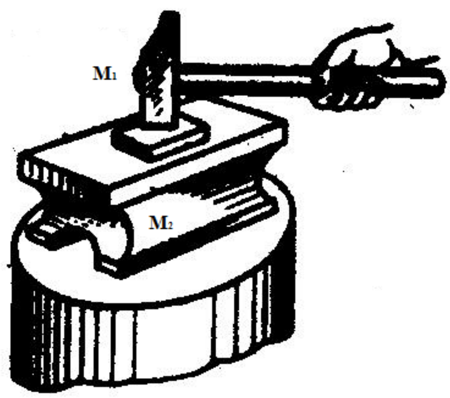


61.1-nji surat

2. Urulýan jisimiň massasy urýan jisimiň massasyndan köp uly, $M_2 >> M_1$.

Bu ýagdaýda $\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 0$ diýip kabul edip bolar. (61.6) formuladan $T_2 \approx 0$ bolýandygyny alarys. Şeýlelikde, ähli kinetik energiýa urulýan jisimiň deformasiýasyna sarp edilýär. Urgudan soň jisimleri gozganmaýan hökmünde kabul edip bolar.

Amaly taýdan bu ýagdaýy ýençgilemek hadysasynda görüp bolar (61.2-nji surat).



61.2-nji surat