10-njy BAP
Mehaniki sistemanyň dinamikasy

§35. Mehaniki sistema.

1. **Mehaniki sistema.**
2. **Içki we daşky güýçler.**
3. **Mehaniki sistemanyň massalar merkezi, inersiýa momenti.**
4. **Käbir birjynsly jisimleriň inersiýa momentleri.**
5. **Gýuýgensiň teoremasy.**
6. **Bir nokatda kesişýän oklara görä inersiýa momentler. Inersiýa ellipsoidi.**
7. **Jisimiň baş inersiýa oklary.**

35.1. Mehaniki sistema.

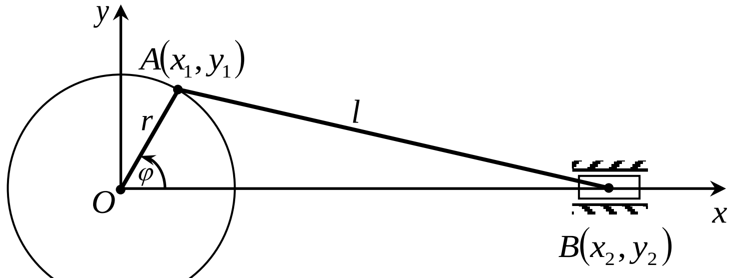
Öň belläp geçişimiz ýaly, hereketleri biri-biriniň hereketlerine bagly bolan material nokatlaryň tükenikli ýa-da tükeniksiz köplügine *mehaniki sistema* diýilýär. Eger mehaniki sistema girýän material nokatlar erkin bolsa, ýagny nokatlar islendik ugra ornuny üýtgedip bilýän bolsa, onda bu material nokatlaryň bir sistema jemlenmegi olaryň arasyndaky özara täsir güýçleri bilen şertlenendir. Şeýle sistemanyň mysaly Gün sistemasy bolup biler. Gün sistemasyna girýän jisimleriň arasynda Bütin dünýä dartylma kanuny bilen kesgitlenen güýçler täsir edýärler.

Eger mehaniki sistema girýän material nokatlaryň hereketleri käbir geometrik häsiýetli şertlere tabyn bolsa, onda bu sistema *geometrik baglanyşykly sistema* diýilýär. Geometrik baglanyşykly sistemanyň mysaly, özara agramsyz steržen bilen bagly iki sany material nokat bolup biler. Şeýle-de, nokatlaryň arasyndaky uzaklygy üýtgemeýän gaty jisim hem şeýle sistemanyň mysalydyr.

Geometrik baglanyşyklary sistema girýän material nokatlaryň koordinatalaryny baglanyşdyrýan deňlemeler bilen aňladyp bolýar. Meselem, uzynlygy l bolan steržen bilen bagly $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ material nokatlar üçin baglanyşyk

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2$$

deňleme bilen aňladylýar. Kriwoşip-şatun mehanizmi (35.1-nji surat) üçin



35.1-nji surat

baglanyşyk üç deňleme bilen kesgitlenýär.

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = r^2 \ , \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2 \ , \\ y_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Umumy ýagdaýda, n sany material nokatly mehaniki sistema üçin baglanyşyklar S sany deňlemeler bilen kesgitlenýär:

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ , \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_S(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \ . \end{cases} \tag{35.1}$$

Şeýlelikde, $S < 3n$ bolmaly. $S = 3n$ bolan ýagdaýda sistemanyň nokatlarynyň koordinatalary (35.1) deňlemeler sistemasyndan hemişelikler hökmünde kesgitlenerdiler, ýagny sistema hereket edip bilmezdi.

Baglanyşyklaryň deňlemelerine t wagt girmeýän bolsa, onda bu baglanyşyklara *stasionar* baglanyşyklar diýilýär. Eger t wagt f_i funksiýalaryň argumenti hökmünde baglanyşyklaryň deňlemelerine girýän bolsa, onda bu baglanyşyklara *stasionar däl* baglanyşyklar diýilýar. Stasionar däl baglanyşyklaryň deňlemeleri

$$\begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ , \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \end{cases} \tag{35.2}$$

görnüşlidir.

35.2. Içki we daşky güýçler.

Mehaniki sistemanyň nokatlaryna täsir edýän güýçleri şeýle toparlara bölmek bolar:

1) Mehaniki sistema girýän material nokatlaryň koordinatalaryna, tizliklerine we wagta bagly **goýlan güýçler;**

2) Reaksiýa güýçleri (baglanyşyklar bar bolsa);

Başga tarapdan, mehaniki sistemanyň nokatlaryna täsir edýän güýçleri **daşky güýçler** we **içki güýçler** ýaly toparlara hem bölüp bolar.

Daşky güýçler–mehaniki sistema girmeýän material nokatlar ýa-da jisimler tarapyndan mehaniki sistemanyň nokatlaryna täsir edýan güýçler.

Içki güýçler – mehaniki sistema girýän material nokatlaryň özara täsir güýçleri.

Hereket edýän otlyny bir mehaniki sistema hökmünde kabul etsek, onda onuň agramy, relsleriň reaksiýasy, tigirleriň relse bolan sürtülmesi, howanyň garşylyk güýji-daşky güýçlerdir. Ýangyjyň döredýän basyşy, podşipniklerde ýüze çykýan sürtülme güýçler, wagonlaryň özara täsir güýçleri-içki güýçlerdir.

Soňlugy bilen täsir edýan güýçleri daşky we içki güýçlere bölmekligiň özi sistemanyň dinamikasynda wajyp ornunyň bardygyna göz ýetireris.

Dinamikanyň üçünji kanunyna laýyklykda içki güýçler **jübüt-jübütden garşylyklydyrlar, ululyklary boýunça deňdirler.**

35.3. Mehaniki sistemanyň massalar merkezi, inersiýa momenti.

Mehaniki sistemanyň hereketi goýlan güýçlerden daşary sistemanyň massasyna we massalaryň paýlanyşyna bagly. Sistema girýän material nokatlaryň massalarynyň jemine, ýagny

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{35.3}$$

ululyga *sistemanyň massasy* diýilýär. Bu ýerde $m_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)$-sistema girýän material nokadyň massasy.

Massalaryň paýlanyşy sistemadaky nokatlaryň m_k massalary, nokatlaryň x_k, y_k, z_k koordinatalary bilen kesgitlenýär. Emma dinamikanyň meseleleri, hususanda, gaty jisimiň dinamikasyna degişli meseleler işlenende m_k, x_k, y_k, z_k ululyklary bilmezden bularyň üsti bilen aňladylýan jemleýji häsiýetlendirijileri bilmeklik ýeterlik bolýar. Jemleýji häsiýetlendirijiler hökmünde sistemanyň massalar merkeziniň koordinatasy, sistemanyň inersiýa momentleri ýaly ululyklar seredilýär. Ýokarda agzalan häsiýetlendirijiler bilen tanyşalyň.

Agyrlyk meýdanynda $\left\{m_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)\right\}$ mehaniki sistema seredeliň. (x_k, y_k, z_k), $\left(k = \overline{1,n}\right)$–$m_k$ massaly material nokadyň koordinatasy, $P_k \left(k = \overline{1,n}\right)$–$m_k$ massaly material nokadyň agramy, ýagny $P_k = m_k \cdot g$. Elbetde, $\left\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots \vec{P}_n\right\}$–parallel güýçler sistemasy bolup durýar. Statikadan belli bolşy ýaly, bu güýçleriň merkezi C nokadyň koordinatalary şeýle kesgitlenýär:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \ y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \ z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k} \tag{35.4}$$

Başgaça aýdylanda, (35.4) formula bilen $\left\{m_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)\right\}$ mehaniki sistemanyň „agyrlyk merkezi” kesgitlenýär.

(35.4) formulada P_k ululyklary $m_k \cdot g$ bilen çalşyryp, g ululyga gysgaltsak,

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \ y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \ z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

deňligi ýa-da $\left(M = \sum_{k=1}^{n} m_k\right)$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{M}, \ y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{M}, \ z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k}{M} \tag{35.5}$$

formulany alarys.

Koordinatalary (35.5) formula bilen kesgitlenýän C nokada mehaniki sistemanyň *massalar merkezi* ýa-da *inersiýa merkezi* diýilýär.

Massalar merkeziniň $\vec{r}_C$ radius-wektory üçin (35.5) formuladan

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{r}_k \tag{35.6}$$

formulany alarys, bu ýerde $\vec{r}_k - m_k$ massaly nokadyň radius-wektory.

Bellik. Agyrlyk meýdanynda ýerleşýän jisim üçin agyrlyk merkezi bilen massalar merkezi gabat gelýär. Emma agyrlyk merkezinden tapawutlylykda, massalar merkezi öz manysyny islendik meýdanda saklaýar.

Indi mehanikanyň wajyp düşünjeleriniň biri bolan, mehaniki sistemanyň (gaty jisimiň) inersiýa momenti düşünjesi bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Mehaniki sistemanyň berlen *z* oka görä inersiýa momenti diýlip, sistema girýän material nokatlaryň massalarynyň bu nokatlardan *z* oka çenli uzaklyklarynyň kwadratlaryna köpeltmek hasyllaryndan ybarat bolan jeme aýdylýar:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2 \ , \tag{35.7}$$

bu ýerde $h_k - m_k$ massaly material nokatdan *z* oka çenli uzaklyk.

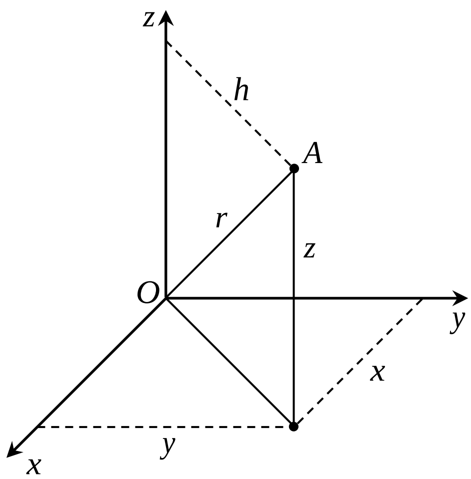
Şuňa meňzeşlikde *O* nokada görä inersiýa momenti kesgitlenýär:

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot r_k^2 \tag{35.8}$$

bu ýerde $r_k - m_k$ massaly material nokatdan *O* nokada çenli uzaklyk.

Bellik. Gaty jisimiň inersiýa momenti kesgitlenende jisimi tükeniksiz köp sanly material nokatlardan ybarat mehaniki sistema hökmünde kabul etmeli. Inersiýa momentiň ölçeg birligi $kg \cdot m^2$.

Goý, gaty jisim *Oxyz* koordinatalar sistemasynda seredilýän bolsun.



35.2-nji surat

Jisimiň $A(x, y, z)$ nokadynyň massasyny *m*, *A* nokatdan *z* oka çenli uzaklygy *h* bilen belgilesek, jisimiň *z* oka görä inersiýa momenti

$$I_z = \sum m \cdot h^2$$

aňlatma bilen kesgitlener. Suratdan görnüşi ýaly, $h^2 = x^2 + y^2$. Diýmek, $I_z = \sum m \cdot (x^2 + y^2)$. Elbetde, şuňa meňzeşlikde, I_x, I_y ululyklary hem kesgitläp bolar. Onda jisimiň koordinatalar oklaryna görä inersiýa momentleri aşakdaky görnüşde bolar:

$$I_x = \sum m \cdot (y^2 + z^2), \ I_y = \sum m \cdot (x^2 + z^2), \ I_z = \sum m \cdot (x^2 + y^2) \tag{35.9}$$

Kesgitlemesi boýunça $I_O = \sum m \cdot r^2$. Emma $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ deňligi göz öňünde tutup,

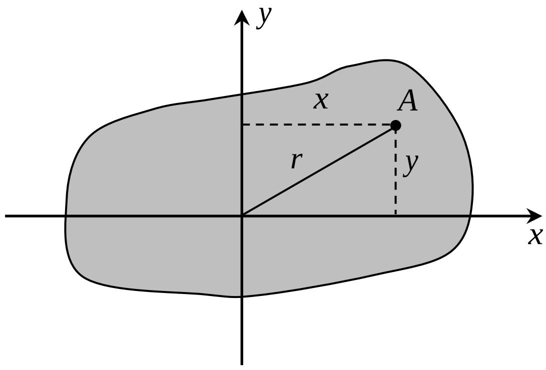
$$I_O = \sum m \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{35.10}$$

deňligi alarys. (35.9), (35.10) formulalardan

$$I_O = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right) \tag{35.11}$$

baglanyşygy taparys, ýagny **jisimiň koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momenti onuň koordinatalar oklaryna görä inersiýa momentleriniň ýarym jemine deň.**

Goý, jisim ýuka plastina görnüşli, ýagny galyňlygy ujypsyz jisim bolsun.



35.3-nji surat

35.3-nji suratdan görnüşi ýaly, $I_x = \sum m \cdot y^2$, $I_y = \sum m \cdot x^2$

we

$$I_O = \sum m \cdot r^2 = \sum m \cdot \left(x^2 + y^2\right) . \tag{35.12}$$

Bu ýerden

$$I_O = I_x + I_y \tag{35.13}$$

baglanyşygy taparys, ýagny **tekiz figuranyň koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momenti onuň koordinatalar oklaryna görä inersiýa momentleriniň jemine deň.**

Elbetde, (35.12), (35.13) formulalary (35.10), (35.11) formulalarda degişlilikde, $z = 0$, $I_z = I_O$ goýup hem alyp bolar.

Hasaplaýyş işlerinde jisimiň oka görä (meselem, z oky) *inersiýa radiusy* ululykdan peýdalanylýar. Jisimiň z oka görä ρ inersiýa radiusy aşakdaky deňlik bilen kesgitlenýär:

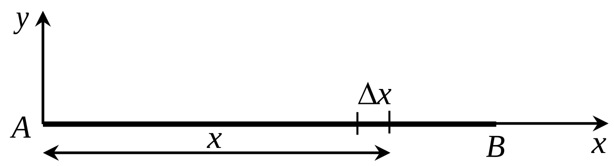
$$I_z = m \cdot \rho^2 , \tag{35.14}$$

bu ýerde m-jisimiň massasy.

35.4. Käbir birjynsly jisimleriň inersiýa momentleri.

Ýönekeý geometrik formaly käbir jisimleriň inersiýa momentlerini kesgitläliň.

1. **Material kesim** (steržen). Uzynlyy l bolan, m massaly AB kesimiň A nokada ýa-da Ay oka görä inersiýa momentini kesgitläliň.



35.4-nji surat

AB sterženi tükeniksiz kiçi elementar bölejiklere böleliň. Elementar bölejikden *A* nokada çenli uzaklygy *x* bilen, onuň massasyny Δm bilen belgiläliň. Onda

$$I_A = I_y = \sum \Delta m \cdot x^2$$

Eger elementar bölejigiň uzynlygyny Δx bilen belgilesek, $\Delta m = \rho \cdot \Delta x$ (ρ-sterženiň dykyzlygy) bolar. Bu ýerden

$$I_A = I_y = \sum \rho \cdot x^2 \cdot \Delta x$$

Bu jemiň predeli 0-dan l-e çenli alnan kesgitlenen integral bilen tapylýar. Diýmek,

$$I_A = I_y = \int_0^l \rho \cdot x^2 dx = \rho \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \rho \cdot \frac{l^3}{3} = \rho \cdot l \frac{l^2}{3} = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

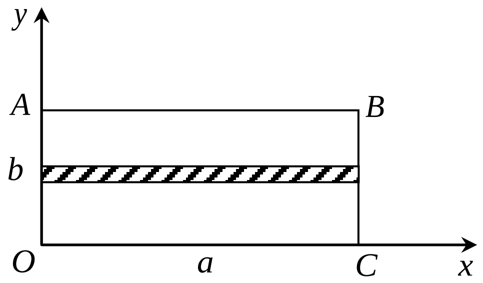
Şeýlelik bilen, sterženiň başky nokadyna ýa-da başky nokadyndan geçýän steržene perpendikulýar oka görä inersiýa momenti

$$I_A = I_y = \frac{1}{3} m \cdot l^2 \qquad (35.15)$$

formula bilen kesgitlenýär.

2. **Material gönüburçluk.**

Taraplarynyň uzynlyklary a, b we massasy m bolan $OABC$ ýuka gönüburçluk görnüşli plastinanyň Oy oka görä inersiýa momentini kesgitläliň.



35.5-nji surat

OABC gönüburçlugyň meýdanyny *Ox* oka parallel göni çyzyklar bilen elementar bölejiklere böleliň. Her bir bölejigi kesim hökmünde kabul edip, bu bölejigiň *Oy* oka görä inersiýa momentiniň (35.15) fomulanyň esasynda $\frac{1}{3}\Delta m \cdot a^2$-a deňdigini belläliň; Δm-bölejigiň massasy. Onda ähli plastina üçin

$$I_y = \sum \frac{1}{3} \Delta m \cdot a^2 = \frac{1}{3} a^2 \sum \Delta m = \frac{1}{3} m \cdot a^2$$

deňligi alarys. Şeýlelik bilen,

$$I_y = \frac{1}{3} m \cdot a^2 \tag{35.16}$$

Ýokardaka meňzeşlikde,

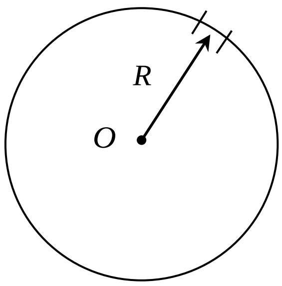
$$I_x = \frac{1}{3} m \cdot b^2 \tag{35.17}$$

formulany alarys. (35.13) formulanyň esasynda (35.16), (35.17) formulalardan taparys:

$$I_O = I_x + I_y = \frac{1}{3} m \cdot \left(a^2 + b^2\right) \tag{35.18}$$

3. Material töwerek.

R radiusly, *m* massaly material töweregiň onuň merkezi *O* nokada görä inersiýa momentini kesgitläliň.



35.6-njy surat

Töweregi elementar dugalara böleliň; Δm-elementar duganyň massasy. Ähli elementar dugalar *O* nokatdan *R* aralykda ýerleşýärler, diýmek,

$$I_O = \sum \Delta m R^2 = R^2 \sum \Delta m = mR^2$$

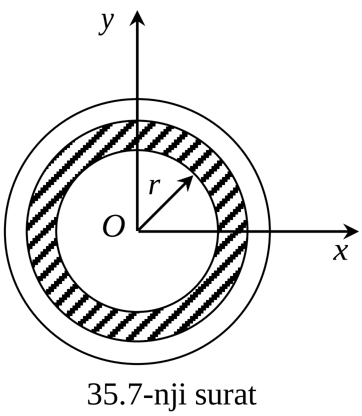
Şeýlelikde, töweregiň onuň merkezine görä, şeýle-de, merkezinden geçýän, töweregiň tekizligine perpendikulýar *z* oka görä inersiýa momenti

$$I_O = mR^2 \tag{35.19}$$

formula bilen tapylýar.

4. Tegelek (disk)

R radiusly, *m* massaly tegelegiň *O* merkezine görä inersiýa momentini kesgitläliň.



35.7-nji surat

Umumy merkezli konsentrik töwerekler bilen tegelegi elementar halkalara böleliň. Halkanyň radiusyny *r*, galyňlygyny Δr, massasyny Δm bilen belgiläliň. Her bir halkany töwerek hökmünde kabul edip, tegelegiň inersiýa momentini $I_O = \sum \Delta m \cdot r^2$ – a deňdigini taparys. Tegelek birjynslydygy sebäpli onuň dykyzlygy $\rho = \dfrac{m}{\pi R^2}$ –a deň, elementar halkanyň meýdany birinji tertipli tükeniksiz kiçi takyklygy bilen $2\pi r \cdot \Delta r$ – e deň, diýmek, $\Delta m = \rho \cdot 2\pi r \cdot \Delta r$. Bu ýerden

$$I_O = \sum \rho \cdot 2\pi r^3 \cdot \Delta r = \int_0^R \rho \cdot 2\pi r^3 dr = 2\pi \cdot \rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = 2\pi \cdot \rho \cdot \frac{R^4}{4} = 2\pi \cdot \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2$$

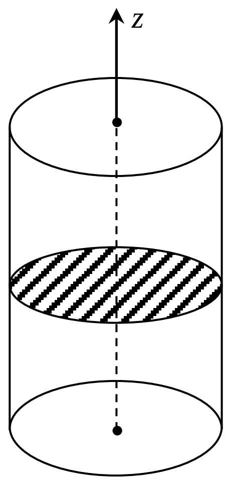
Şeýlelik bilen, tegelegiň onuň merkezine görä ýa-da tegelegiň merkezinden geçýän, tegelegiň tekizligine perpendikulýar *z* oka görä inersiýa momenti

$$I_O = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (35.20)$$

formula bilen kesgitlenýär.

5. Tegelek silindr.

R radiusly, *m* massaly tegelek silindriň onuň *z* aýlanma okuna görä inersiýa momentini tapalyň.



35.8-nji surat

Esasyna parallel tekizlikler bilen silindri tegeleklere böleliň. Her bir tegelegiň *z* oka görä inersiýa momenti (35.20) formulanyň esasynda $\frac{1}{2}\Delta mR^2$–a deň, Δm–tegelegiň massasy. Ähli tegelekleriň inersiýa momentlerini jemläp, silindriň *z* oka görä inersiýa momentini taparys:

$$I_z = \sum \frac{1}{2} \Delta mR^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum \Delta m = \frac{1}{2} mR^2$$

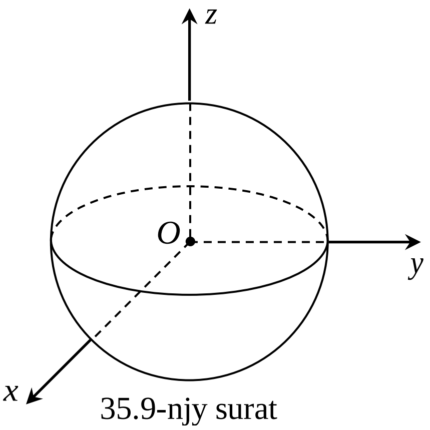
Şeýlelikde, tegelek silindriň onuň aýlanma okuna görä inersiýa momenti

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (35.21)$$

formula bilen kesgitlenýär.

6. Material şar.

R radiusly, m massaly şaryň onuň O merkezine görä inersiýa momentini tapalyň.



35.9-njy surat

Şary umumy merkezli, konsentrik sferalar bilen sfera görnüşli ýuka gatlaklara böleliň, r-gatlagyň radiusy, Δm-massasy, Δr-galyňlygy. Gatlagyň ähli nokatlary şaryň merkezinden r aralykdalygy sebäpli, gatlagyň O nokada görä inersiýa momenti $\Delta m \cdot r^2$-a deň.

Şaryň O nokada görä inersiýa momenti ähli gatlaklaryň O nokada görä inersiýa momentleriniň jemine deň.

Elementar sferik gatlagyň göwrümini birinji tertipli tükeniksiz kiçi takyklygy bilen $4\pi r^2 \cdot \Delta r$-a deň hasap edip bolar, onda onuň massasy $\Delta m = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r$. Diýmek, $I_O = \sum \rho \cdot 4\pi r^4 \cdot \Delta r$ ýa-da predele geçip taparys:

$$I_O = \int_0^R \rho \cdot 4\pi r^4 dr = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{R^5}{5} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{3R^2}{5} = \frac{3}{5} mR^2$$

Şeýlelik bilen, şaryň onuň merkezine görä inersiýa momenti

$$I_O = \frac{3}{5} mR^2 \qquad (35.22)$$

fomula bilen kesgitlenýär.

Şaryň başlangyjy şaryň merkezinde bolan koordinata oklaryna görä inersiýa momentlerini kesgitlemek üçin $I_x = I_y = I_z$ deňligi belläliň. Onda (35.11) formulanyň esasynda taparys:

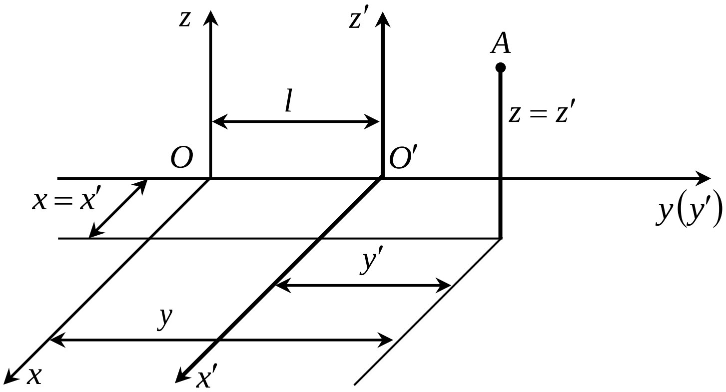
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} mR^2 \qquad (35.23)$$

35.5. Gýuýgensiň teoremasy.

Jisimiň parallel oklara görä inersiýa momentleriniň arasyndaky baglanyşyk aşakda getirilen teorema bilen görkezilýär.

Gýuýgensiň teoremasy. Jisimiň berlen oka görä we bu oka parallel, jisimiň agyrlyk merkezinden geçýän oka görä inersiýa momentleriniň tapawudy jisimiň massasynyň bu oklaryň arasyndaky uzaklygyň kwadratyna köpeltmek hasylyna deň.

Subudy. Koordinatalar başlangyjyny (O) jisimiň agyrlyk merkezinde alalyň. Berlen oky z' bilen, z' oka parallel, O nokatdan geçäyn oky z bilen belgiläliň. Oy okuny z' oky käbir O' nokatda kesip geçer ýaly, x' oky O' nokatdan Ox oka parallel (35.10-njy surata seret) geçireliň.



35.10-njy surat

z we z' oklaryň arasyndaky uzaklygy l bilen, jisimiň massasyny M bilen belgiläliň. (35.9) formuladan $I_z = \sum m\left(x^2 + y^2\right)$ we $I_{z'} = \sum m\left(x'^2 + y'^2\right)$.

Goý, A-jisimiň erkin nokady bolsun. Parallel göçürmede $x' = x$, $y' = y - l$, $z' = z$ koordinata özgertmelerini ulanalyň. Onda:

$$I_{z'} = \sum m\left(x^2 + (y-l)^2\right) = \sum m\left(x^2 + y^2 - 2ly + l^2\right) = \sum m\left(x^2 + y^2\right) - 2l\sum my + l^2\sum m =$$
$$= I_z - 2l\sum my + l^2 M.$$

Emma $\sum my$ ululyk (35.5 formula boýunça) My_C ululyga deň, bu ýerde y_C–jisimiň agyrlyk merkeziniň koordinatasy. Jisimiň agyrlyk merkezi O nokatda (koordinatalar başlangyjy) bolandygy sebäpli, $y_C = 0$, ýa-da $\sum my = 0$. Onda

$$I_{z'} = I_z + M\,l^2 \tag{35.24}$$

Teorema subut edildi.

Hristian Gýuýgens (1629-1695)

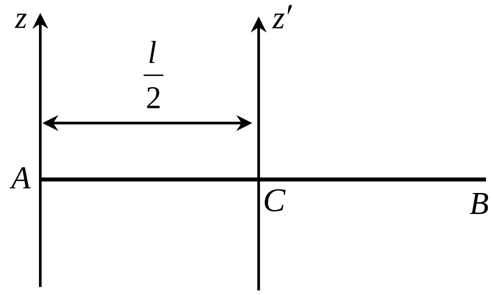
Hristian Gýuýgens 1629-njy ýylyň 14-nji aprelinde Gaaga şäherinde eneden dogulýar. Onuň ilkinji işleriniň biri 1651-nji ýylda “giperbolanyň, ellipsiň we töweregiň kwadraturasy” ady bilen çykýar. 1654-nji ýylda ewolýut we ewolwent nazaryýetini açýar. 1673-nji ýylda mehanika degişli bolan “Maýatnik sagady” diýlen işi çap edilýär. Gýuýgens erkin gaçýan jisim üçin deňtizlenýän hereketiň kanunyny ýüze çykarýar. Ol Fransiýanyň ylymlar akademiýasynda birnäçe ýyl işleýär.

(35.24) formuladan $I_{z'} > I_z$ deňsizlik gelip çykýar, ýagny **berlen ugur boýunça inersiýa momentleriň iň kiçisi agyrlyk merkezinden geçýän ok boýunça bolup durýar.**

Subut edilen teoremanyň ulanylyşyndan bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. l uzynlykly, m massaly sterženiň agyrlyk merkezine görä inersiýa momentini kesgitlemeli.

Çözülişi.



35.11-nji surat

C-sterženiň agyrlyk merkezi;
z-sterženiň başky nokadyndan geçýän, steržene perpendikulýar ok;
z' - *C* nokatdan geçýän, *z* oka parallel ok.
Elbetde, $I_A = I_z$, $I_C = I_{z'}$. Onda, Gýuýgensiň teoremasyndan alarys:

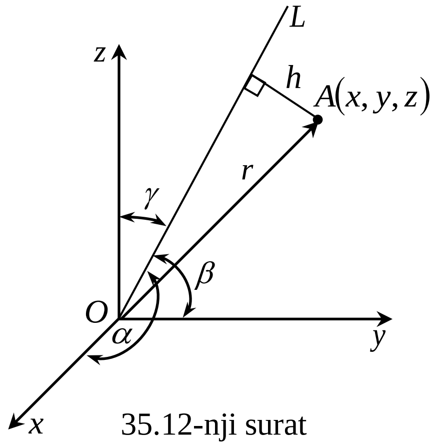
$$I_A = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 ,$$

$$I_C = I_A - \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2 ,$$

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2 .$$

35.6. Bir nokatda kesişýän oklara görä inersiýa momentler. Inersiýa ellipsoidi.

Gýuýgensiň teoremasyndan jisimiň berlen oka görä inersiýa momentini kesgitlemek üçin jisimiň agyrlyk merkezinden geçýän, berlen oka parallel oka görä inersiýa momentini kesgitläp bilmek ýeterlikdigi gelip çykýar. Şu sebäpli, jisimiň bir nokatda (meselem, jisimiň agyrlyk merkezinde) kesişýän oklara görä inersiýa momenlerini kesgitlemeklik meselesini goýalyň. Erkin *O* nokady *Oxyz* koordinatalar sistemasynyň başlangyjy hökmünde alalyň.
O nokatdan, koordinata oklary bilen degişlilikde α, β, γ burçlary emele getirýan *OL* oky geçireliň.



35.12-nji surat

Jisimiň *OL* oka görä *I* inersiýa momentini kesgitläliň. Jisimi elementar bölejiklere, ýagny material nokatlara böleliň. *A*-jisimiň erkin nokady; *x,y,z*-*A* nokadyň koordinatalary; *h*-*A* nokatdan *OL* oka çenli uzaklyk. Onda $I = \sum mh^2$. *m*-*A* nokadyň massasy. Analitiki geometriýadan belli bolşy ýaly, *A* nokatdan *OL* göni çyzyga çenli uzaklygyň kwadraty

$$h^2 = (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2$$

formula bilen tapylýar. Bu deňlikde ýaýlary açyp, ýönekeý özgertmelerden soň alarys:

$$h^2 = \cos^2\alpha\left(y^2+z^2\right)+\cos^2\beta\left(z^2+x^2\right)+\cos^2\gamma\left(x^2+y^2\right)-2\cos\beta\cos\gamma\cdot yz-$$
$$-2\cos\gamma\cos\alpha\cdot zx-2\cos\alpha\cos\beta\cdot xy$$

Diýmek,

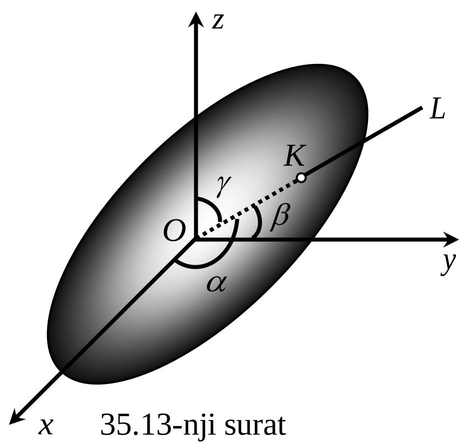
$$I=\sum mh^2=\cos^2\alpha\sum m\left(y^2+z^2\right)+\cos^2\beta\sum m\left(z^2+x^2\right)+\cos^2\gamma\sum m\left(x^2+y^2\right)-$$
$$-2\cos\beta\cos\gamma\sum myz-2\cos\gamma\cos\alpha\sum mzx-2\cos\alpha\cos\beta\sum mxy$$

(35.9) formuladan belli bolşy ýaly, $\sum m\left(y^2+z^2\right),\sum m\left(z^2+x^2\right),\sum m\left(x^2+y^2\right)$ jemler degişlilikde koordinata oklaryna görä I_x, I_y, I_z inersiýa momentleri bolup durýarlar.

$\sum myz$,$\sum mzx$,$\sum mxy$ jemler **merkezden gaýdýan** inersiýa momentler diýlip atlandyrylýarlar we degişlilikde I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} bilen belgilenýärler. Elbetde, bu momentleri hasaplamak üçin kesgitlenen integrallary ulanmaly. Eger, $I_x = A$, $I_y = B$, $I_z = C$, $I_{yz} = D$, $I_{zx} = E$ we $I_{xy} = F$ belgileleri girizsek, onda soňky deňlik:

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta \tag{35.25}$$

görnüşe geler. *A,B,C,D,E,F* koeffisiýentler belli bolanda *O* nokatdan geçýän, koordinata oklary bilen α,β,γ burçlary emele getirýän oka görä inersiýa momentlerini (35.25) formula bilen hasaplap bolar. Inersiýa momentleriniň α,β,γ burçlara baglylyklarynyň geometrik manysyny öwreneliň.



35.13-nji surat

O nokatdan dürli ugurlar boýunça oklary geçireliň. Her bir okuň üstünde $OK = \frac{1}{\sqrt{I}}$ kesim alyp goýalyň, bu ýerde *I*-jisimiň seredilýän oka görä inersiýa momenti. Şeýlelik bilen, *O* nokatdan çykýan her bir oka, bu ok boýunça ugrukdyrylan *OK* kesim degişli bolar. *K* nokatlaryň geometrik ornuny kesgitläliň. Eger *K* nokadyň koordinatalaryny *x,y,z* bilen belgilesek,

$$x = OK\cdot\cos\alpha,\ y = OK\cdot\cos\beta,\ z = OK\cdot\cos\gamma$$

bolar ýa-da

$$x=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{I}},\ y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{I}},\ z=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{I}}$$

Bu ýerden

$$\cos\alpha = x\sqrt{I},\cos\beta = y\sqrt{I},\cos\gamma = z\sqrt{I}$$

Bu ululyklary (35.25) formulada ýerine goýup,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1 \qquad (35.26)$$

deňlige geleris. Diýmek, K nokatlaryň köplügi (35.26) formula bilen berilýän merkezi O nokatda bolan ikinji tertipli üsti emele getirýär. Analitiki geometriýadan belli bolşy ýaly, (35.26) deňleme ellipsoidiň deňlemesi. Bu ellipsoide *inersiýa ellipsoidi* diýilýär.

$OK = \dfrac{1}{\sqrt{I}}$ deňlikden $I = \dfrac{1}{OK^2}$ deňlik gelip çykýar. Diýmek, jisimiň O nokatdan çykýan oka görä inersiýa momenti bu ok bilen inersiýa ellipsoidiniň kesişme nokadynyň radius-wektorynyň uzynlygynyň kwadratyna ters proporsionaldyr.

35.7. Jisimiň baş inersiýa oklary.

Analitiki geometriýadan belli bolşy ýaly, ellipsoidiň üç sany özara perpendikulýar simmetriýa oky bar, bu oklara degişli edilende ellipsoidiň deňlemesi koordinatalaryň köpeltmek hasyllary bolan agzalary özünde saklamaýar.

Erkin alnan O nokat üçin gurlan inersiýa ellipsoidiniň oklary *jisimiň O nokatdaky baş inersiýa* oklary diýlip atlandyrylýar. Eger O nokatdaky baş inersiýa oklaryny $Oxyz$ koordinatalar sistemasynyň oklary hökmünde kabul etsek, (35.25) deňlemäniň çepindäki soňky üç agza ýiter, ýagny

$$D = I_{yz} = 0,\ E = I_{zx} = 0,\ I_{xy} = 0$$

bolar. Diýmek, jisimiň O nokatdan geçýän, baş inersiýa oklary bilen α, β, γ burçlary emele getirýän oka görä inersiýa momenti

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \qquad (35.27)$$

formula bilen kesgitlener, bu ýerde A, B, C-jisimiň O nokatdaky baş inersiýa oklaryna görä inersiýa momentleri.

Jisimiň agyrlyk merkezinde gurlan inersiýa ellipsoidine **merkezi inersiýa ellipsoidi** diýilýär. Merkezi inersiýa ellipsoidiň oklaryna **baş merkezi inersiýa oklary** diýilýär.

Jisimiň erkin oka görä inersiýa momentini kesgitlemek üçin jisimiň ξ, η, ζ baş merkezi oklarynyň ugurlaryny, jisimiň bu oklara görä I_ξ, I_η, I_ζ inersiýa momentlerini bilmek ýeterlik. Hakykatdan hem goý baş merkezi inersiýa oklary bilen α, β, γ burçlary emele getirýän L' oka görä I' inersiýa momentini kesgitlemeklik meselesi goýlan bolsun. Jisimiň agyrlyk merkezinden L' oka parallel L oky geçireliň. Aşakdaky belgilmeleri girizeliň:

$l - L, L'$-oklaryň arasyndaky uzaklyk; I-jisimiň L oka görä inersiýa momenti; m-jisimiň massasy. Onda, $I' = I + ml^2$. Başga tarapdan, $I = I_\xi \cos^2\alpha + I_\eta \cos^2\beta + {}$ ${}+ I_\zeta \cos^2\gamma$. Bu ýerden

$$I' = I_\xi \cos^2\alpha + I_\eta \cos^2\beta + I_\zeta \cos^2\gamma + ml^2 \qquad (35.28)$$

Görnüşi ýaly, baş merkezi inersiýa oklarynyň wajyp orny bar.

Umumy ýagdaýda, baş merkezi inersiýa oklarynyň ugurlaryny kesgitlemek örän çylşyrymly mesele. Ýöne aşakda getirilen subutsyz kabul ediljek teoremalardan görnüşi ýaly, eger jisimiň simmetrik formasy bar bolsa, baş merkezi inersiýa oklarynyň ugurlaryny kesgitlemek ýeňilleşýär.

1-nji teorema. Eger jisimiň simmetriýa tekizligi bar bolsa, onda baş merkezi inersiýa oklarynyň biri simmetriýa tekizligine perpendikulýardyr (diýmek, beýleki ikisi bu tekizlikde ýatýar).
2-nji teorema. Eger jisimiň simmetriýa oky bar bolsa, onda bu simmetriýa oky baş merkezi inersiýa oky bolup durýar.
3-nji teorema. Eger haýsy hem bolsa bir O nokatdaky baş inersiýa oklarynyň biri jisimiň agyrlyk merkezinden geçýän bolsa, onda bu ok baş merkezi inersiýa okudyr.
Bellik. Eger jisimiň baş merkezi inersiýa oklaryna görä inersiýa momentleri özara deň bolsa, ýagny $I_\xi = I_\eta = I_\zeta$ bolsa, onda bu jisimiň inersiýa ellipsoidi şar bolup durýar. Bu ýagdaýda jisimiň agyrlyk merkezinden geçýän erkin ok jisimiň baş merkezi inersiýa oky bolýar we jisimiň bu oklara görä inersiýa momentleri özara deňdirler. Birjynsly kub şeýle jisimiň mysaly bolup biler.

§36. Mehaniki sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teorema.

1. **Sistemanyň hereketiniň differensial deňlemeleri.**
2. **Sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teorema.**
3. **Massalar merkeziniň hereketiniň saklanmak kanuny.**

36.1. Sistemanyň hereketiniň differensial deňlemeleri.

$\{m_k, k=\overline{1,n}\}$ mehaniki sistema seredeliň. Öňki paragrafda belläp geçişimiz ýaly, sistema täsir edýän güýçleri iki topara böleliň: içki güýçler, daşky güýçler. m_k massaly material nokada aýratynlykda seredeliň. Şertli belgilemeler girizeliň:
$\vec{F}_k^i - m_k$ massaly nokada täsir edýän içki güýçleriň deňtäsiredijisi;
$\vec{F}_k^e - m_k$ massaly nokada täsir edýän daşky güýçleriň deňtäsiredijisi;
$\vec{a}_k - m_k$ massaly nokadyň tizlenmesi.
Seredilýän nokat üçin dinamikanyň ikinji kanuny

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e \qquad (36.1)$$

görnüşde ýazylýar.

Umumy sistema üçin bu deňlemeler n sany bolar $(k=\overline{1,n})$. Bu n sany deňlemäni koordinatalar oklaryna proýektirlesek, $3n$ sany

$$\begin{cases} m_k \dfrac{d^2 x_k}{dt^2} = F_{kx}^i + F_{kx}^e, \\ m_k \dfrac{d^2 y_k}{dt^2} = F_{ky}^i + F_{ky}^e \qquad k=\overline{1,n}, \\ m_k \dfrac{d^2 z_k}{dt^2} = F_{kz}^i + F_{kz}^e \end{cases} \qquad (36.2)$$

differensial deňlemleri alarys. (36.2) deňlemeler sistemasy mehaniki sistemanyň hereketiniň differensial deňlemeleri bolup durýar.

36.2. Sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teorema.

Käbir halatlarda sistemanyň (hususanda, gaty jisimiň) hereketini häsiýetlendirmek üçin onuň massalar merkeziniň hereket kanunyny bilmek ýeterlik bolýar. Bu kanuny kesgitlemek üçin (36.1) deňlemä girýän n sany deňlemäni özara goşalyň. Netijede alarys:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (36.3)$$

Alnan deňlemäniň çep bölegini özgerdeliň. (35.6) formuladan bilşimiz ýaly,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M \cdot \vec{r}_C$$

Bu deňlemäniň iki tarapyny hem iki gezek differensirläliň:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2}$$

ýa-da

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = M \cdot \vec{a}_C \ , \qquad (36.4)$$

bu ýerde $\vec{a}_C$ – sistemanyň massalar merkeziniň tizlenmesi.

Içki güýçleriň jübüt-jübütden garşylykly ugrukdyrylyp, ululyklary boýunça deňdikleri sebäpli, $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = \vec{0}$. Onda (36.3)-den (36.4)-i ulanyp taparys:

$$M \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (36.5)$$

Alnan (36.5) deňlemäni teorema hökmünde tassyklalyň.

Sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teorema. Sistemanyň massasynyň massalar merkeziniň tizlenmesine köpeltmek hasyly sistema täsir edýän daşky güýçleriň wektorlaýyn jemine deň.

(36.5) deňlemäni material nokadyň hereket deňlemesi bilen deňeşdirsek ýokardaky teoremany şeýle beýan etmek bolar:

Mehaniki sistemanyň massalar merkeziniň hereketi massasy sistemanyň massasyna deň bolan material nokadyň sistemanyň daşky güýçleriniň täsiri astyndaky hereketi ýaly bolup geçýär.

(36.5) deňlemäni koordinatalar oklaryna proýektirläp,

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \ , \\ M \cdot \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e \ , \\ M \cdot \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \end{cases} \qquad (36.6)$$

deňlemeleri alarys.

Bellik. Subut edilen teorema mehaniki sistemanyň massalar merkeziniň hereketi öwrenilende näbelli içki güýçleri göz öňünde tutmazlyga mümkinçilik berýär.

36.3. Massalar merkeziniň hereketiniň saklanmak kanuny.

Sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teoremadan käbir wajyp netijeler gelip çykýar. Bu netijeleri seljereliň we käbir mysallara seredip geçeliň.

1. Goý, sistema täsir edýän daşky güýçleriň wektorlaýyn jemi nol wektor bolsun, ýagny $\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e=\vec{0}$. Onda, (36.5) deňlemeden $\vec{a}_C=\vec{0}$ ýa-da $\vec{\upsilon}_C=const$ bolmalydygy gelip çykýar. Diýmek, eger sistema täsir edýän daşky güýçleriň wektorlaýyn jemi nol wektora deň bolsa, sistemanyň massalar merkezi gönüçyzykly we deňölçegli hereket edýär. **Içki güýçleriň sistemanyň massalar merkeziniň hereketine täsiri ýok.**

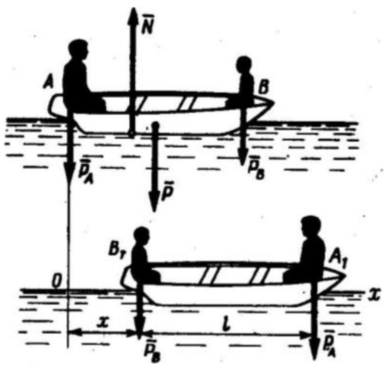
2. Goý, sistema täsir edýän daşky güýçleriň haýsy hem bolsa bir oka, (meselem, x okuna) proýeksiyalarynyň jemi nola deň bolsa, ýagny $\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^e=0$ bolsa, onda (36.6) deňlemeden $\ddot{x}_C=0$ ýa-da $\dot{x}_C=\upsilon_{Cx}=const$ bolýandygy gelip çykýar, ýagny sistema täsir edýän daşky güýçleriň x okuna proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolsa, onda massalar merkeziniň bu ok boýunça tizligi hemişelikdir.

Getirilen netijeler **massalar merkeziniň saklanmak kanunyny** görkezýär.

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. Agramy P, uzynlygy l bolan gaýygyň iki gyrasynda agramlary P_A, P_B bolan iki sany adam otyr. Adamlar ýerlerini çalşanlarynda gaýyk näçe aralyga süýşer? Suwuň garşylygyny göz öňünde tutmaly däl.

Çözülişi.



36.1-nji surat

Içki güýçleri göz öňünde tutmazlyk üçin adamlary we gaýygy bir sistema hökmünde kabul edeliň. $\vec{P},\vec{P}_A,\vec{P}_B,\vec{N}$ -daşky güýçler ($\vec{N}$ -suwuň reaksiýasy).

Ox-okuny 36.1-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň. Görnüşi ýaly, $\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^e=0$, ýagny daşky güýçleriň x okuna proýeksiýalarynyň jemi nola deň, diýmek, $\upsilon_{Cx}=0$ (gaýyk ilki başda dynçlykda). Onda $x_C=const$ bolmaly. 36.1-nji suratda gaýyk ilki başda we soňky ýagdaýda şekillendirilen. Sistemanyň massalar merkezi üýtgemeýär. Diýmek,

$$\frac{m_A\cdot 0+m\cdot\frac{l}{2}+m_B\cdot l}{m_A+m+m_B}=\frac{m_B\cdot x+m\left(\frac{l}{2}+x\right)+m_A(l+x)}{m_A+m+m_B}$$

m_A, m_B, m -degişlilikde adamlaryň we gaýygyň massasy; x-gaýygyň süýşen aralygy.

Bu deňlemäni $(m_A + m + m_B)\cdot g$ ululyga köpeldip alarys:

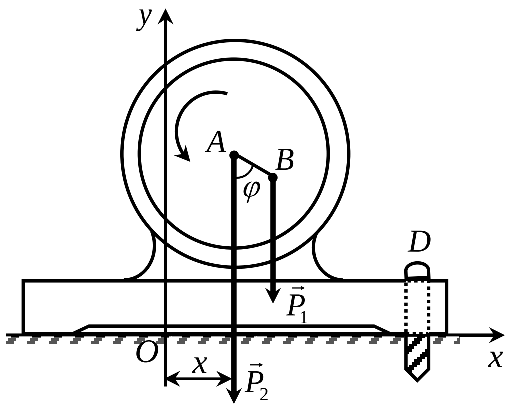
$$P\frac{l}{2} + P_B \cdot l = P_B \cdot x + P\left(\frac{l}{2} + x\right) + P_A(l + x)$$

Alnan çyzykly deňlemeden $x = \dfrac{(P_B - P_A)\cdot l}{P + P_A + P_B}$ bolýandygyny taparys.

Eger, $P_B > P_A$ bolsa gaýyk saga, eger $P_B < P_A$ bolsa gaýyk çepe süýşer, $P_B = P_A$ bolsa, gaýyk öňki ýerinde bolar.

Mysal. Walyň massalar merkezi aýlanma okundan $AB = b$ aralykda. Walyň massasy m_1, motoryň beýleki bölekleriniň massasy m_2. Eger walyň burç tizligi $\omega = const$ bolsa, ýylmanak gorizontal tekizlikde goýlan motor nähili hereket eder? Eger motor D nokatda bolt bilen gorizontal tekizlige berkidilse, bolta täsir edýän maksimal güýji kesgitlemeli.

Çözülişi.



36.2-nji surat

Waly aýlaýan güýçleri içki güýçler etmek üçin **wal+motor** sistema seredeliň.

1. Berkidilmedik motora täsir edýän daşky güýçler ($\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$ we tekizligiň reaksiýasy) wertikal. Diýmek, *Ox* ok boýunça hereketiň saklanmak kanunyny ulanyp bolar. Başlangyç pursatda *A*,*B* nokatlar bir wertikalda (*Oy* okunda) ýerleşýärler diýip alsak, *Ox* oky boýunça *A* nokadyň süýşmesi *x*, *B* nokadyň süýşmesi $x + b\sin\varphi$ bolar, $\varphi = \omega\cdot t$ deňligi göz öňünde tutup, hereketiň saklanmak kanunyndan $m_2 x + m_1(x + B\sin\varphi) = 0$ deňligi alarys, Bu ýerden

$$x = -\frac{m_1 b}{m_1 + m_2}\sin(\omega\cdot t)$$

Motor ω aýlaw ýygylykly garmoniki yrgyldy hereket eder.

2. Motor bolt bilen berkidilen bolanda, (36.6) deňlikden (*x* oky boýunça) $R_x = (m_1 + m_2)\cdot \ddot{x}_C$ (R_x boltuň *x* oky boýunça reaksiýasy) deňlemäni alarys. Sistemanyň massalar merkezi $x_C = \dfrac{1}{m_1 + m_2}(m_1 x_B + m_2 x_A)$. *A*-gozganmaýan nokat, $(x_A = 0)$, $x_B = b\sin(\omega\cdot t)$. x_C–ni iki gezek differensirläp, $R_x = (m_1 + m_2)\cdot \ddot{x}_C$ deňlemede goýsak,

$$R_x = -m_1 b\omega^2 \sin(\omega\cdot t)$$

deňligi alarys. Bu güýjüň maksimal bahasy elbetde, $m_1 b\omega^2$–a deň.

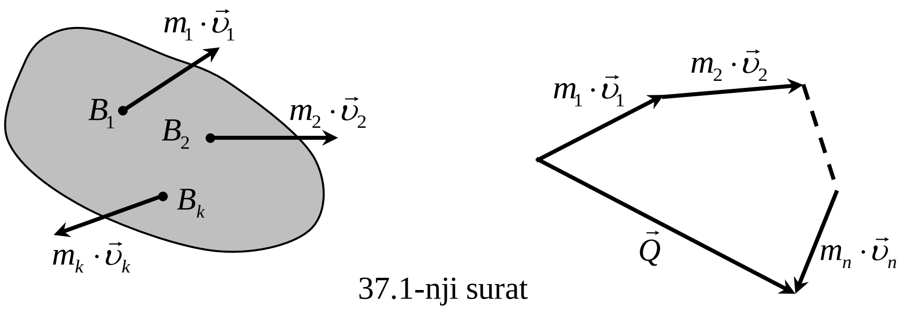
§37. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

1. **Mehaniki sistemanyň hereket mukdary.**
2. **Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.**
3. **Hereket mukdarynyň saklanmak kanuny.**

37.1. Mehaniki sistemanyň hereket mukdary.

$\{m_k, k=\overline{1,n}\}$ mehaniki sistema seredeliň. Goý, $\vec{\upsilon}_k - m_k$ massaly nokadyň tizligi bolsun.

Kesgitleme. Mehaniki sistema girýän material nokatlaryň hereket mukdarlarynyň wektorlaýyn jemine (baş wektoryna) **mehaniki sistemanyň hereket mukdary** diýilýär.



37.1-nji surat

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\upsilon}_k \tag{37.1}$$

$\vec{Q}$–sistemanyň hereket mukdary. (35.6) formuladan gelýän $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C$ deňligiň iki tarapyndan önüm alyp, $\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M\frac{d\vec{r}_C}{dt}$ ýa-da $\sum m_k \vec{\upsilon}_k = M \cdot \vec{\upsilon}_C$ deňlige geleris.

Bu ýerden:

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{\upsilon}_C \tag{37.2}$$

Diýmek, **sistemanyň hereket mukdary sistemanyň massasynyň massalar merkeziniň tizligine köpeltmek hasylyna deň.**

(37.2) formuladan görnüşi ýaly, eger hereketdäki jisimiň (sistemanyň) massalar merkezi hereket etmeýän bolsa, sistemanyň hereket mukdary nola deň. Meselem, massalar merkezinden geçýän okuň daşyndan aýlanýan jisimiň hereket mukdary nola deň.

Eger jisimiň hereketi çylşyrymly hereket bolsa, onuň $\vec{Q}$ hereket mukdary jisimiň hereketiniň aýlanma bölegine bagly däl. Meselem, tigirlenýän tigir üçin massalar merkeziniň daşynda aýlanmasyna baglanyşyksyz $\vec{Q} = M \cdot \vec{\upsilon}_C$ bolar. Şeýlelik bilen, sistemanyň (jisimiň) hereket mukdaryny onuň hereketiniň öňe bolan böleginiň häsiýetnamasy hökmünde kabul edip bolar.

37.2. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

(36.1) deňlige girýän n sany deňlemäni özara goşalyň:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \ .$$

Sistemanyň içki güýçleriniň häsiýeti boýunça $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = \vec{0}$. Mundan başga-da:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k \frac{d\vec{\upsilon}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k \vec{\upsilon}_k = \frac{d}{dt} \vec{Q}$$

Netijede

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (37.3)$$

formulany alarys. (37.3) deňlemäni teorema hökmünde tassyklalyň.

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema (differensial görnüşi). Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň önümi sistema täsir edýän daşky güýçleriň wektorlaýyn jemine deň.

(37.3) deňlik koordinatalar oklaryna proýeksiýalarda

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \ , \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e \ , \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \qquad (37.4)$$

görnüşe eýe bolar, bu ýerde

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kx} \ , \quad Q_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{ky} \ , \quad Q_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_{kz} \ ,$$

ýagny sistemanyň koordinatalar oklary boýunça hereket mukdarlary.

Goý, $t = 0$ pursatda sistemanyň hereket mukdary $\vec{Q}_0$, t-wagt pursatda $\vec{Q}$ bolsun. (37.3) deňligi degişli çäklerde integrirlesek,

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \vec{F}_k^e d\tau \qquad (37.5)$$

deňligi alarys. Emma mälim bolşy ýaly, $\int_0^t \vec{F}_k^e d\tau - \vec{F}_k^e$ güýjüň t wagtyň dowamyndaky impulsydyr. Diýmek,

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \qquad (37.6)$$

(37.6) formulany teorema hökmünde tassyklalyň.

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

Mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň käbir wagtyň dowamynda üýtgemegi sistema täsir edýän daşky güýçleriň şu wagtyň dowamyndaky impulslarynyň jemine deň.

(37.6) formula koordinatalar oklaryna proýeksiýalarda,

$$Q_x - Q_0 = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e \ , \ Q_y - Q_0 = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e \ , \ Q_z - Q_0 = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e \qquad (37.7)$$

görnüşde bolar.

Getirilen teorema bilen sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teoremanyň arasyndaky arabaglanyşyga seredeliň.

$\dfrac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \vec{a}_C$ deňligi göz öňünde tutup, $\vec{Q} = M \cdot \vec{\upsilon}_C$ deňligi (37.3) formulada goýsak,

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$$

bolýandygyny göreris, ýagny (36.5) formulany aldyk.
Diýmek, massalar merkeziniň hereketi hakyndaky we hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremalar manysy boýunça bir kanunyň mazmuny bolup durýarlar.

37.3. Hereket mukdarynyň saklanmak kanuny.

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakyndaky teoremadan käbir wajyp netijeler gelip çykýar. Bu netijeler bilen tanyşalyň.

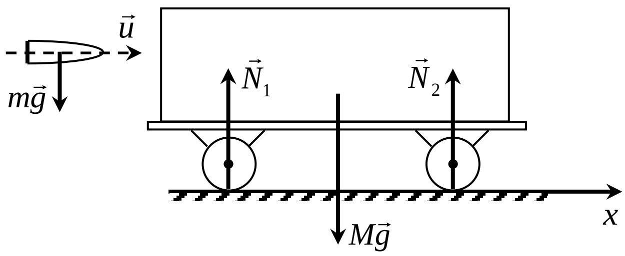
1. Eger sistema täsir edýän daşky güýçleriň jemi nola deň bolsa, ýagny $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = \vec{0}$ bolsa, onda (37.3) deňlikden sistemanyň hereket mukdarynyň hemişelikdigi gelip çykýar, $\vec{Q} = const$.

2. Eger sistema täsir edýän daşky güýçleriň bir oka, meselem, x okuna proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolsa, ýagny $\sum_{k=1}^{n} F_{k\,x}^e = 0$ bolsa, onda (37.4) deňlikden $Q_x = const$ bolýandygyny göreris.

Bu netijeler hereket mukdarynyň saklanmak kanunynyň mazmunydyr. Görnüşi ýaly, içki güýçler sistemanyň hereket mukdaryny üýtgedip bilmeýär. Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. $\vec{u}$ gorizontal tizlikli, m massaly ok duran arabajygyň üstündäki içi çägeli gutynyň içine girýär. Arabajyk bilen gutynyň bilelikdäki massasy M. Ok girenden soň arabajygyň tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi.



37.2-nji surat

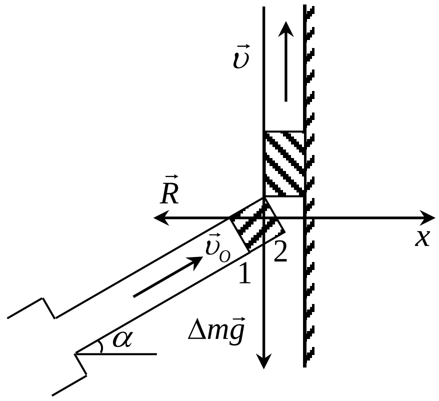
Eger, **arabajyk+ok** sistema seretsek, arabajyga ok girendäki urgy güýjüni (içki güýç) göz öňünde tutmasyz bolarys.

Sistema täsir edýän daşky güýçleriň ($m\vec{g}, M\vec{g}$ -agyrlyk güýçleri, $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ -reaksiýa güýçleri) gorizontal x oka proýeksiýalary nola deň. Diýmek, $Q_x = const$, ýagny $Q_{1x} = Q_{Ox}$, bu ýerde Q_{Ox} -sistemanyň ok girmänkä hereket mukdary, Q_{1x} -sistemanyň ok girenden soňky hereket mukdary Diýmek,

$$Q_{Ox} = m \cdot u + M \cdot O\ ,\ Q_{1x} = (m + M) \cdot \upsilon$$

deňliklerden alarys: $(m+M)\cdot\upsilon = m\cdot u$ ýa-da $\upsilon = \dfrac{m\cdot u}{(m+M)}$.

Mysal. Kese-kesiginiň meýdany $s = 16sm^2$, ýapgytlyk burçy $\alpha = 30^0$ turbadan suw $8\dfrac{m}{sek}$ tizlikli hereket edýär. Suw massasy wertikal diwara urgudan soň



37.3-nji surat

wertikal ugur boýunça hereket edýär. Suwuň diwara edýän basyş güýjüni kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, Δt wagtda Δm massaly suw bölegi turbadan çykýan bolsun (1-2 kesik).

$\vec{R}$-diwaryň reaksiýa güýji.

$\vec{\upsilon}$ -suw massasynyň wertikal boýunça tizligi.

$\upsilon_O = 8\dfrac{m}{sek}$ -turbadaky tizlik.

Hereket mukdarynyň üýtgemegi hakynda teoremadan (37.5-nji formula) alarys: $\Delta m\cdot\vec{\upsilon} - \Delta m\cdot\vec{\upsilon}_O = \vec{R}\cdot\Delta t$. Bu deňligi x okuna proýektirläp, $-\Delta m\cdot\upsilon_O\cdot\cos\alpha = -R\cdot\Delta t$ ýa-da $\Delta m\cdot\upsilon_O\cdot\cos\alpha = R\cdot\Delta t$ deňligi alarys. Bu ýerden $\Delta m = \rho\cdot s\cdot\upsilon_0\cdot\Delta t$ ($\rho = 1000\dfrac{kg}{m^3}$ -suwuň dykyzlygy) bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\rho\cdot s\cdot\upsilon_0\cdot\Delta t\cdot\upsilon_0\cdot\cos\alpha = R\cdot\Delta t$$

ýa-da

$$R = \rho\cdot s\cdot\upsilon_0^2\cdot\cos\alpha = 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 16sm^2\cdot\left(8\frac{m}{sek}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 88{,}7\,N$$

R-diwaryň reaksiýasy, diýmek, diwarada ululygy boýunça *R*-e deň bolan güýç täsir edýär (dinamikanyň III kanuny).

§38. Üýtgeýän massaly jisimiň hereketi. Raketanyň hereketi.

1. **Üýtgeýän massaly jisim.**
2. **Raketanyň hereketi. Meşerskiniň deňlemesi.**
3. **Sialkowskiniň formulasy.**

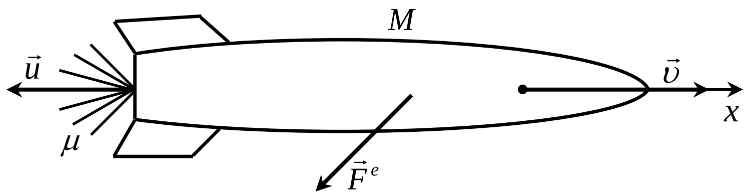
38.1. Üýtgeýän massaly jisim.

Klassyky mehanikada jisimiň massasy hemişelik ululyk hasaplanýar. Emma käbir halatlarda, material nokatlaryň jisime goşulmagy ýa-da jisimden aýrylmagy sebäpli jisimiň massasy üýtgeýär.

Şu paragrafda, jisimiň massasynyň üýtgemegi üznüksiz bolup geçýän halatyna seredip geçeliň. Massasy üznüksiz üýtgeýän jisime **üýtgeýän massaly jisim** diýilýär. Üýtgeýän massaly jisimiň massasy wagta bagly $m = F(t)$ üznüksiz funksiýa bolup durýar.

38.2. Raketanyň hereketi. Meşerskiniň deňlemesi.

Üznüksiz üýtgeýän massaly jisimiň hereketini raketanyň hereketiniň mysalynda öwreneliň.



38.1-nji surat

Ýanan ýangyjyň önüminiň görälik tizligini (raketa görä) $\vec{u}$ bilen belgiläliň. Ýanan ýangyjyň önümini itekläp çykarýan güýçleri içki güýçler hökmünde kabul edeliň.

Goý, Δt wagtyň dowamynda μ massaly bölejik (ýanan ýangyjyň önümi) çykýan bolsun. Elbetde, μ ululygy boýunça *dm*-e deň. *m*-raketanyň şu pursatdaky massasy. *m*-ululygyň kemelýändigi sebäpli $(dm < 0)$ $\mu = -dm$.

Raketa+bölejik sistema üçin (37.3) deňlemäni

$$d\vec{Q} = \vec{F}^e dt \tag{38.1}$$

görnüşde ýazalyň. $\vec{F}^e$ – raketa täsir edýän daşky güýçleriň jemi.

Eger raketanyň $\vec{\upsilon}$ tizligi *dt* wagtyň dowamynda $d\vec{\upsilon}$ ululyga üýtgese, seredilýän sistemanyň hereket mukdary $m \cdot d\vec{\upsilon}$ ululyga üýtgär. *t* wagt pursatda bölejigiň hereket mukdary $\mu \cdot \vec{\upsilon}$-e deň (bölejik şu pursatda jisimiň düzüminde), $t + \Delta t$ wagt pursatda $\mu \cdot (\vec{\upsilon} + \vec{u})$ bolar. Sebäbi bölejik $\vec{u}$ goşmaça tizlik alýar. Diýmek, *dt* wagtyň dowamynda bölejigiň hereket mukdary

$$\mu \cdot \vec{u} = -dm \cdot \vec{u}$$

ululyga üýtgär. Sistemanyň hereket mukdary bolsa $d\vec{Q} = md\vec{\upsilon} - dm\vec{u}$ ululyga üýtgär.

$d\vec{Q}$-ny (38.1) deňlemede ýerine goýup, deňlemäniň iki bölrgini hem *dt* gysgaltsak,

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{u}\frac{dm}{dt} \tag{38.2}$$

deňlemäni alarys.

(38.2) wektor deňleme **Meşerskiniň deňlemesi** diýlip atlandyrylýar. (38.2) deňlemäniň sagyndaky soňky goşulyjyny $\vec{\Phi}$ bilen belgiläp,

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{\Phi} \qquad (38.3)$$

görnüşe getireliň. $\vec{\Phi}$ wektor ululyga **reaktiw güýç** diýilýär.

Wagt birliginde sarp edilýän ýangyjyň massasyny G_s (wagt birliginde ýanýan ýangyç) bilen belgiläliň. Onda alamatyny göz öňünde tutsak,

$$\frac{dm}{dt} = -G_s$$

deňligi alarys, ýa-da

$$\vec{\Phi} = -G_s \cdot \vec{u}\,, \qquad (38.4)$$

ýagny reaktiw güýç wagt birliginde sarp edilýän ýangyjyň massasynyň ýanan ýangyjyň önüminiň göräli̇k tizligine köpeltmek hasylyna deňdir we ugry boýunça görälik tizlige garşylyklydyr.

38.3. Sialkowskiniň formulasy.

Raketanyň hereketini diňe reaktiw güýç täsir edende öwreneliň.

Goý, $\vec{F}^e = \vec{0}$, $\vec{u} = const$ bolsun; x okuny 38.1-nji suratda görkezilişi ýaly alsak, $\upsilon_x = \upsilon$, $u_x = -u$ bolar we (38.2) deňleme $m\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$ ýa-da $d\upsilon = -u\frac{dm}{m}$ görnüşe geler. Bu deňlemäni degişli çäklerde integrirläp alarys:

$$\upsilon = \upsilon_0 + u\ln\frac{m_0}{m}\,. \qquad (38.5)$$

Bu ýerde m_0-başlangyç massa, υ_0-başlangyç tizlik.

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:
m_k -raketanyň korpusynyň we içindäki enjamlarynyň umumy massasy;
m_i-ýangyjyň massasy.
Elbetde,

$$m_0 = m_k + m_i$$

Ähli ýangyç gutarandan soň (38.5) deňleme

$$\upsilon = \upsilon_0 + u\ln\left(1 + \frac{m_i}{m_k}\right) \qquad (38.6)$$

görnüşe geler. Bu deňlemä **Sialkowskiniň deňlemesi** diýilýär. (38.6) deňleme howasyz we agyrlyk güýjüniň ýok ýerinde dogrudyr. (38.6) formuladan görnüşi ýaly, predel tizlik şu ululyklara bagly:

1. başlangyç tizlik υ_0;
2. ýanan ýangyjyň önüminiň u tizligi (çykyş tizligi);
3. ýangyjyň görälik $\frac{m_i}{m_k}$ (Sialkowskiniň sany) mukdary.

Sialkowskiniň formulasynyň amaly taýdan wajyplygy, bu formula kosmiki hereket üçin gerek bolan uly tizlikleri almaklygyň usullaryny görkezýär. Şeýle usullar

$\frac{m_i}{m_k}, u, \upsilon_0$ ýaly ululyklaryň ulaldylmagy bilen amala aşyrylýar. Aýratynda u we υ_0 ululyklaryň ulaldylmagy has ýokary netije berýär. Ulanylýan suwuk ýangyçlar ýanan ýangyjyň önüminiň $u = 3000 \div 4500 \frac{m}{sek}$ çykyş tizligini almaga mümkinçilik berýär.

§39. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň baş momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema.

1. **Mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň baş momenti (kinetiki moment). Hereket mukdarlarynyň baş momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema (momentler teoremasy).**
2. **Gozganmaýan okuň daşynda aýlanýan jisimiň kinetik momenti.**
3. **Baş momentiň saklanmak kanuny.**

39.1. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň baş momenti (kinetiki moment). Hereket mukdarlarynyň baş momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema (momentler teoremasy).

n sany material nokatdan ybarat bolan mehaniki sistema seredeliň. Bu nokatlaryň birini saýlap alalyň. Alnan nokadyň massasyny m_k, tizligini $\vec{\upsilon}_k$ bilen belgiläliň. Nokada täsir edýän daşky we içki güýçler degişlilikde $\vec{F}_k^e$ we $\vec{F}_k^i$ bolsun.

Material nokadyň hereket mukdarynyň nokada görä momentiniň üýtgemegi hakyndaky teorema boýunça alarys:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{m}_0(m_k\vec{\upsilon}_k)\right) = \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) \tag{39.1}$$

(39.1) deňlemäni sistema degişli ähli nokatlar üçin ýazyp, deňlemeleri özara goşsak,

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0(m_k\vec{\upsilon}_k) = \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) \tag{39.2}$$

deňligi alarys. (39.2) deňligiň sag bölegindäki ikinji goşulyjy içki güýçleriň häsiýeti boýunça $\vec{0}$-a deň; ýagny $\sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) = \vec{0}$. Bu deňligiň çepindäki jem görnüşli wektor ululyga mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň O nokada görä **baş momenti** ýa-da **kinetik momenti** diýilýär, ýagny

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0(m_k\vec{\upsilon}_k) \tag{39.3}$$

$\vec{K}_0$ -baş moment (kinetik moment).

Ýokarda aýdylanlary göz öňünde tutup,

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{39.4}$$

deňligi alarys. Alnan netijäni teorema hökmünde tassyklalyň.

Momentler teoremasy. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň gozganmaýan merkeze görä baş momentiniň önümi sistema täsir edýän daşky güýçleriň bu merkeze görä momentleriniň jemine deň.

Oka görä hem hereket mukdarlaryň baş momenti (kinetik moment) düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Mehaniki sistemanyň hereket mukdarlarynyň oka görä (meselem, x okuna) baş momenti (kinetik momenti) diýlip sistema girýän material nokatlaryň hereket mukdarlarynyň oka görä momentleriniň algebraik jemine aýdylýar, ýagny

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_x(m_k\vec{\upsilon}_k) \tag{39.5}$$

K_x-baş moment (mehaniki sistemanyň kinetik momenti).

Material nokadyň hereket mukdarynyň oka görä momentiniň üýtgemegi hakyndaky teoremany sistema girýän material nokatlar üçin ulanyp, alnan deňlemeleri özara goşup,

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_x(m_k\vec{\upsilon}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_x\left(\vec{F}_k^e\right)$$

deňligi alarys. Bu ýerden:

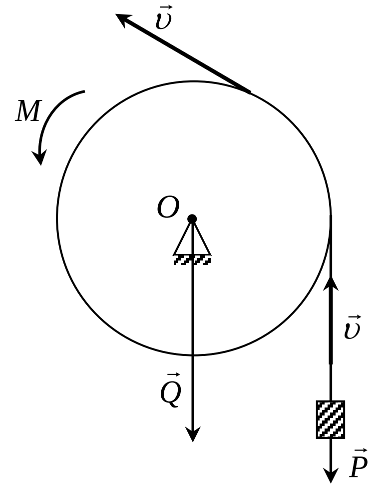
$$\frac{d}{dt}K_x = \sum_{k=1}^{n} m_x\left(\vec{F}_k^e\right) , \tag{39.6}$$

ýagny **mehaniki sistemanyň gozganmaýan oka görä kinetik momentiniň önümi sistema täsir edýän daşky güýçleriň bu oka görä momentleriň jemine deň.**

Elbetde, (39.6) formula y,z oklar üçin hem dogry, $\frac{d}{dt}K_y = \sum_{k=1}^{n} m_y\left(\vec{F}_k^e\right)$, $\frac{d}{dt}K_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k^e\right)$

(39.6) formulanyň ulanylyşyna degişli bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Gorizontal okuň daşyndan aýlanýan r radiusly, Q agramly şkiwiň daşyna ýüp oralan. Ýüpüň ujuna P agramly jisim berkidilen. Şkiwe $M = const$ aýlandyryjy moment (M momentli jübüt) goýlan. Galdyrylýan jisimiň tizlenmesini tapmaly. Şkiwi material töwerek hökmünde kabul etmeli.



39.1-nji surat

Çözülişi. Şkiwiň nokadynyň tizligini $\vec{\upsilon}$ bilen belgiläliň we mehaniki sistemanyň (şkiw+jisim) O nokada görä (O nokatdan geçýän, şkiwiň tekizligine perpendikulýar oka görä) kinetik momentini tapalyň:

$$K_0 = \frac{p}{g}\upsilon \cdot r + \sum m\upsilon \cdot r = \frac{p}{g}\upsilon \cdot r + \upsilon \cdot r\sum m \ ,$$

bu ýerde m-şkiwiň nokadynyň (elementar bölejik) massasy. Elbetde, $\sum m = \frac{Q}{g}$.

Onda $K_0 = \frac{\upsilon \cdot r}{g}(P+Q)$. Sistema goýlan daşky güýçleriň O nokada görä momentleriniň jemi

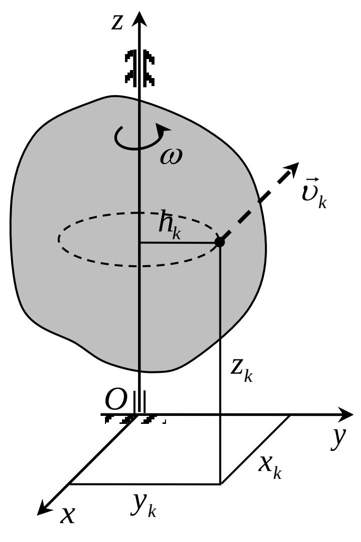
$$\sum m_0\left(\vec{F}_k^e\right) = M - P \cdot r$$

Momentler teoremasyndan $\frac{dK_0}{dt} = M - P \cdot r$ ýa-da, $\frac{r}{g}(P+Q)\frac{d\upsilon}{dt} = M - P \cdot r$ deňligi alarys. Bu deňlikden gözlenýän tizlenmäni taparys $\left(\frac{d\upsilon}{dt} = a\right)$:

$$a = \frac{M - p \cdot r}{r(p+Q)} g$$

39.2. Gozganmaýan okuň daşynda aýlanýan jisimiň kinetik momenti.

Goý, jisim gozganmaýan z okunyň daşyndan aýlanýan bolsun. Bu jisimiň koordinata oklaryna görä K_x, K_y, K_z kinetik momentlerini kesgitläliň.



39.2-nji surat

a) K_z -iň tapylyşy.

Aýlanma okundan h_k aralykdaky nokadyň tizligi $\upsilon_k = \omega \cdot h_k$ deň, bu ýerde ω-jisimiň burç tizligi. Diýmek, bu nokat üçin

$$m_z\left(m_k\vec{\upsilon}_k\right) = m_k\upsilon_k \cdot h_k = m_k \cdot h_k^2 \cdot \omega$$

Onda jisim üçin:

$$K_z = \sum m_k \cdot h_k^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum m_k \cdot h_k^2 \ ,$$

$$K_z = I_z \cdot \omega \ . \qquad (39.7)$$

Şeýlelik bilen, **aýlanýan jisimiň aýlanma okuna görä kinetik momenti bu jisimiň aýlanma okuna görä inersiýa momentiniň jisimiň burç tizligine köpeltmek hasylyna deň.**

Eger mehaniki sistema z okuň daşyndan aýlanýan birnäçe jisimlerden ybarat bolsa, onda

$$K_z = I_{1z} \cdot \omega_1 + I_{2z} \cdot \omega_2 + \ldots + I_{nz} \cdot \omega_n \ , \qquad (39.8)$$

n-jisimleriň sany.

Jisim pursatlaýyn l aýlanma okunyň daşyndan aýlananda hem (39.7) formula dogrudyr. Sebäbi şu pursatda isimiň nokalarynyň tizlikleri edil gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketdäki ýaly paýlanýar. Onda:

$$K_l = I_l \cdot \omega \qquad (39.9)$$

b) K_x, K_y ululyklaryň tapylyşy.

K_x ululygy tapmak üçin $m_x(\vec{\upsilon}_k)$ ululygy $m_x(\vec{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y$ formulada $\vec{F}$-i $\vec{\upsilon}_k$ bilen çalşyralyň:

$$m_x(m_k \vec{\upsilon}_k) = m_k y_k \upsilon_{kz} - m_k z_k \upsilon_{ky}$$

Emma

$$\vec{\upsilon}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = -\omega \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = -\omega \cdot y_k \cdot \vec{i} + \omega \cdot x_k \cdot \vec{j}$$

Diýmek, $\upsilon_{ky} = \omega \cdot x_k$, $\upsilon_{kz} = 0$. Onda, $m_x(m_k \vec{\upsilon}_k) = -m_k x_k z_k \omega$. Bu ýerden alarys:

$$K_x = \sum m_x(m_k \vec{\upsilon}_k) = -\omega \sum m_k x_k z_k \ ,$$

$$K_x = -I_{xz} \cdot \omega \ . \qquad (39.10)$$

Şuňa meňzeşlikde,

$$K_y = -I_{yz} \cdot \omega \qquad (39.11)$$

bolýandygyny hem kesgitläris. Şeýlelik bilen, gozganmaýan z okuň daşyndan aýlanýan jisimiň z okda ýatýan O merkeze görä kinetik momenti $\vec{K}_0$ wektoryň koordinata oklaryna proýeksiýalary (39.7), (39.10), (39.11) formulalar bilen kesgitlenýär.

Umumy ýagdaýda, $\vec{K}_0$ wektor z oky boýunça ugrukdyrylmadyk. Emma Oz ok jisim üçin O nokatda baş inersiýa oky bolsa (hususy ýagdaýda, simmetriýa oky bolsa), onda $I_{xz} = I_{yz} = 0$ bolar. Bu ýagdaýda $K_x = K_y = 0$ we $K_0 = K_z$. Diýmek, ***Oz* aýlanma ok *O* nokatda baş inersiýa oky bolsa, $\vec{K}_0$ wektor *Oz* oky boýunça ugrukdyrylan, ululygy boýunça $I_z \omega$-a deň.**

39.3. Baş momentiň saklanmak kanuny.

Momentler teoremasyndan aşakdaky käbir netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Goý, sistema goýlan daşky güýçleriň O merkeze görä momentleriniň jemi nola deň bolsun, ýagny

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = \vec{0}$$

bolsun. Onda (39.4) formuladan $\vec{K}_0 = const$ bolýandygyny alarys.

Diýmek, **eger sistema goýlan daşky güýçleriň *O* merkeze görä momentleriniň jemi nola deň bolsa, sistemanyň hereket mukdarlarynyň bu merkeze görä baş momenti hemişelikdir.**

2-nji netije. Goý, sistema goýlan daşky güýçleriň gozganmaýan x oka görä momentleriniň jemi nola deň, ýagny $\sum m_x\left(\vec{F}_k^e\right)=0$ bolsun. Onda (39.6) formuladan $K_x = const$ bolýandygyny alarys.

Diýmek, **eger sistema goýlan daşky güýçleriň gozganmaýan oka görä momentleriniň jemi nola deň bolsa, onda sistemanyň bu oka görä kinetik momenti hemişelikdir.**

Bu netijeler mehaniki sistemanyň **hereket mukdarlarynyň baş momentiniň (kinetik momentiniň) saklanmak kanunynyň** mazmunydyr.

Ýokarda getirilen netijeleri aýlanýan sistema üçin ulanalyň. Gozganmaýan z okuň daşyndan aýlanýan sistema seredeliň.

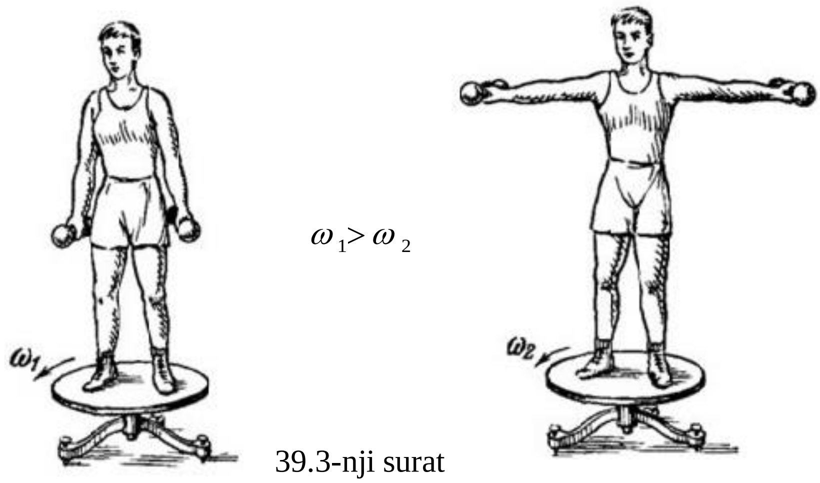
(39.7) formula boýunça $K_z = I_z \cdot \omega$. Eger, $\sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right)=0$ bolsa, onda $I_z\omega = const$. Bu ýerden:

a) Eger sistema üýtgemeýän (gaty jisim) bolsa, onda $I_z = const$, diýmek, $\omega = const$, ýagny jisim z okuň daşyndan hemişelik burç tizlik bilen aýlanýar.

b) Goý, sistema üýtgeýän bolsun, ýagny sistemanyň nokatlary aýlanma okundan daşlaşyp ýa-da ýakynlaşyp bilýän bolsun. Elbetde, bu orunüýtgemeler I_z ululygyň üýtgemegine getirýär. Emma $I_z\omega = const$ bolmalydygy sebäpli I_z-kiçelende ω-artýar we tersine, I_z-ulalanda ω-kiçelýär.

Kinetik momentiň saklanmak kanunynyň mazmunyny aýdyňlaşdyrýan bir mysala seredip geçeliň.

Žukowskiniň platformasy–wertikal z okuň daşyndan ujypsyz sürtülmeli (şarnirde) aýlanýan tegelek gorizontal platforma.



39.3-nji surat

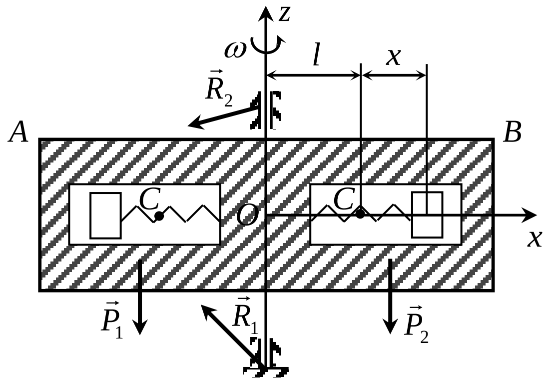
Bu platformanyň üstünde duran adam üçin $\sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right)=0$. Diýmek, $I_z\omega = const$.

Goý, platforma başlangyç burç tizlik berlen bolsun. Eger platformanyň üstündäki eli ýükli adam ellerini galdyrsa, I_z ululyk ulalýar, diýmek, $I_z\omega = const$ bolmalydygy sebäpli ω kiçeler. Şundan soň adam ellerini aşak etse, I_z ululyk kiçelýär, diýmek, $I_z\omega = const$ bolmalydygy sebäpli ω ulalar.

Mysal işlemekde kinetik momentiň saklanmak kanunynyň ulanylyşynyň bir mysalyna seredip geçeliň.

Mysal. z okuň daşynda ω_0 burç tizligi bilen aýlanýan AB sazlaýjyda massalary m bolan iki sany jisim simmetrik ýagdaýda "C" nokatlarda oturdylan, $OC = l$. Käbir wagt pursatynda sazlaýjynyň burç tizligi üýtgeýär we jisimler C merkezleriň töwereginde togtaýan yrgyldyly herekete girýärler. Aýlanma okunda döreýän sürtülme güýjüni ujypsyz hasaplap, sazlaýjynyň burç tizliginiň jisimleriň ýerleşişine baglylykda nähili üýtgejekdigini kesgitlemeli. I_z- sazlaýjynyň z oka görä inersiýa momenti.

Çözülişi.



39.4-nji surat

Näbelli maýyşgaklyk güýçlerini we ugrukdyryjyda döreýän sürtülme güýçlerini içki güýçler etmek maksady bilen “sazlaýjy+jisimler” sistema seredeliň.

Daşky güýçleriň ($\vec{P}_1, \vec{P}_2$-agyrlyk güýçler, $\vec{R}_1, \vec{R}_2$-reaksiýa güýçler) z oka görä momentleri nola deň. Diýmek, $K_z = K_z^{saz} + 2K_z^{jisim} = const$ bolmaly. K_z^{jisim}-ululygy kesgitläliň. Jisimiň tizligi $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e$. Onda $K_z^{jisim} = m_z(m\vec{\upsilon}_r) + m_z(m\vec{\upsilon}_e)$. Emma $\vec{\upsilon}_r$-z oky kesýän Cx okda ýerleşýär, onda $m_z(m\vec{\upsilon}_r) = 0$, $\vec{\upsilon}_e$-tizlik xz tekizlige perpendikulýar, diýmek, $m_z(\vec{\upsilon}_e) = m \cdot \omega (l + x)^2$. Mundan daşary, $K_z^{saz} = I_z \cdot \omega$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $K_z = \left[I_z + 2m(l + x)^2\right] \cdot \omega$ deňligi alarys. $x = 0$ bolanda $\omega = \omega_0$ we $K_z = \left[I_z + 2m \cdot l^2\right] \cdot \omega_0$. $K_z = const$ bolmalydygy sebäpli $K_z = K_{z_0}$. Bu ýerden alarys:

$$\left[I_z + 2m(l + x)^2\right] \cdot \omega = \left(I_z + 2m \cdot l^2\right) \cdot \omega_0$$

ýa-da,

$$\omega = \frac{\left(I_z + 2m \cdot l^2\right)}{I_z + 2m(l + x)^2} \cdot \omega_0$$

$x > 0$ bolanda, $\omega < \omega_0$, $x < 0$ bolanda, $\omega > \omega_0$. Togtaýan yrgyldylarda x nola ymtylanda ω ululyk ω_0-a ymtylýar.

§40. Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema.

1. **Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy.**
2. **Gaty jisimiň dürli hereketlerinde onuň kinetik energiýasy.**
3. **Mehaniki sistemanyň kinetik energiýsynyň üýtgemegi hakyndaky teorema. Käbir hususy halatlar.**

40.1. Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy.

Kitabyň "Material nokadyň dinamikasy" babynda material nokadyň kinetik energiýasy düşünjesi bilen tanyşypdyk. Indi, mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy düşünjesi bilen tanşyp, bu ululygyň sistemanyň (hususan-da, gaty jisimiň) hereketini öwrenmekde ulanylyşy bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Mehaniki sistema girýän material nokatlaryň kinetik energiýalarynyň jemine, ýagny

$$T = \sum m_k \frac{\upsilon_k^2}{2} \tag{40.1}$$

ululyga **mehaniki sistemanyň kinetik energiýasy** diýilýär.

Kinetik energiýa sistemanyň öňe bolan we aýlanma hereketleriniň häsiýetnamasy bolup durýar. Bu ululyk $\vec{Q}, \vec{K}_0$ ululyklardan tapawutlylykda skalýar ululykdyr.

Mälim bolşy ýaly, mehaniki sistemanyň içki güýçleri jübüt-jübütden deň we garşylykly ugrukdyrylan. Şol sebäpli, içki güýçler sistemanyň $\vec{Q}, \vec{K}_0$ ýaly häsiýetnamalaryna täsiri ýok. Emma eger içki güýçleriň täsirinde mehaniki sistemanyň nokatlarynyň tizlikleri üýtgese, onda sistemanyň kinetik energiýasy hem üýtgär. Diýmek, sistemanyň kinetik energiýasyna sistemanyň daşky we içki güýçleriniň täsiri bar.

Bellik. Eger mehaniki sistema birnäçe jisimlerden ybarat bolsa, onda sistemanyň kinetik energiýasy sistema girýän jisimleriň kinetik energiýalarynyň jemine deň.

Aşakda jisimiň hereketiniň görnüşine baglylykda onuň kinetik energiýasyny kesgitläris.

40.2. Gaty jisimiň dürli hereketlerinde onuň kinetik energiýasy.

1. Öňe bolan hereket.

Belli bolşy ýaly, öňe bolan hereketdäki jisimiň nokatlarynyň tizlikleri deň. Onda sistemanyň nokatlarynyň tizlikleri massalar merkeziniň tizligine deň, $\upsilon_k = \upsilon_c$. Onda (40.1) formuladan: $T = \sum m_k \frac{\upsilon_k^2}{2} = \sum m_k \frac{\upsilon_c^2}{2} = \frac{\upsilon_c^2}{2} \sum m_k$ ýa-da

$$T = \frac{M\upsilon_c^2}{2} \tag{40.2}$$

bu ýerde M–jisimiň massasy.

2. Aýlanma hereket.

Goý, jisim gozganmaýan z okuň daşyndan ω burç tizlikli aýlanýan bolsun. Elbetde, jisimiň nokadynyň tizligi, $\upsilon_k = \omega \cdot h_k$, bu ýerde, h_k-nokatdan aýlanma okuna çenli uzaklyk. (40.1) formuladan

$$T = \sum m_k \frac{\upsilon_k^2}{2} = \sum m_k \frac{(\omega \cdot h_k)^2}{2} = \sum m_k h_k^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2$$

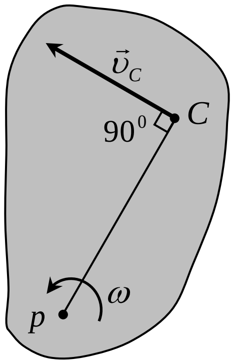
deňligi alarys. $\sum m_k h_k^2$ ululygyň jisimiň z oka görä inersiýa momentidigini göz öňünde tutup, ýokarky deňlikden aýlanýan jisimiň kinetik energiýasy üçin

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2} \qquad (40.3)$$

formulany alarys.

3. Tekiz-parallel hereket.

Bu hereketde islendik wagt pursatynda jisimiň nokatlarynyň tizlikleri, tizlikleriň pursatdaky P merkezinden geçýän, tekiz figuranyň tekizligine perpendikulýar okuň daşyndan aýlanma hereketdäki ýaly paýlanýar.



40.1-nji surat

Onda (40.3) formuladan alarys:

$$T = I_p \frac{\omega^2}{2}, \qquad (40.4)$$

bu ýerde ω-jisimiň burç tizligi; I_p–jisimiň ýokarda agzalan oka görä inersiýa momenti. Tizlikleriň pursatdaky merkezi ornuny üýtgedýändigi sebäpli (40.4) formuladaky I_p ululyk hem üýtgeýär. I_p ululygyň ornuna, jisimiň C massalar merkezinden geçýän oka görä I_C inersiýa momenti ulanalyň. Gýuýgensiň teoremasy boýunça

$$I_p = I_C + Md^2,$$

bu ýerde M–jisimiň massasy, $d = PC$. Bu deňligi (40.4) formulada goýalyň:

$$T = I_C \frac{\omega^2}{2} + Md^2 \frac{\omega^2}{2} = I_C \frac{\omega^2}{2} + M \frac{(\omega \cdot d)^2}{2} = [\omega \cdot d = \upsilon_C] = I_C \frac{\omega^2}{2} + M \frac{\upsilon_C^2}{2}.$$

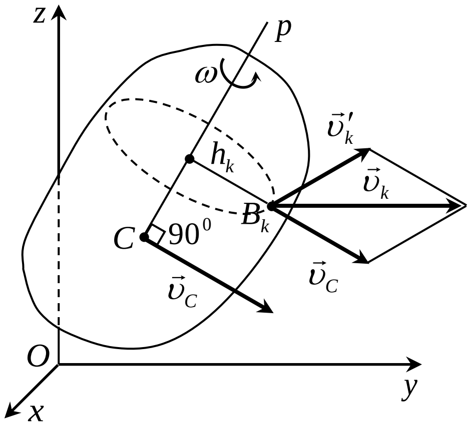
Diýmek, tekiz-parallel hereketdäki jisimiň kinetik energiýasy

$$T = I_C \frac{\omega^2}{2} + M \frac{\upsilon_C^2}{2} \qquad (40.5)$$

formula bilen kesgitlenýär.

4. Hereketiň umumy ýagdaýy.

Jisimiň hereketine umumy ýagdaýda seredeliň. Eger jisimiň C massalar merkezini polýus hökmünde kabul etsek, onda jisimiň hereketi massalar merkeziniň tizligi ýaly $\vec{\upsilon}_C$ tizlikli öňe bolan hereketden we massalar merkezinden geçýän, CP pursatdaky aýlanma okunyň daşynda aýlanma hereketinden düzülýär.



40.2-nji surat

Belli bolşy ýaly, jisimiň erkin B_k nokadynyň $\vec{\upsilon}_k$ tizligi iki tizlikden ybarat

$$\vec{\upsilon}_k = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}'_k$$

Bu ýerde, $\vec{\upsilon}_C$-jisimiň massalar merkeziniň tizligi, $\vec{\upsilon}'_k - B_k$ nokadyň massalar merkezinden geçýän pursatdaky aýlanma okunyň daşyndan aýlanma tizligi,

$$\upsilon'_k = \omega \cdot h_k$$

$h_k - B_k$ nokatdan CP oka çenli uzaklyk, ω-jisimiň burç tizligi (polýusa bagly däl).

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň häsiýetinden peýdalanyp [15],

$$\upsilon_k^2 = (\vec{\upsilon}_k, \vec{\upsilon}_k) = (\vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}'_k, \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}'_k) = \upsilon_c^2 + \upsilon_k'^2 + 2(\vec{\upsilon}_c, \vec{\upsilon}'_k)$$

deňligi alarys. Bu deňligi (40.1) formulada goýup taparys:

$$T = \left(\sum m_k\right) \cdot \frac{\upsilon_c^2}{2} + \left(\sum m_k \cdot h_k^2\right) \cdot \frac{\omega^2}{2} + \left(\vec{\upsilon}_c, \sum m_k \vec{\upsilon}'_k\right)$$

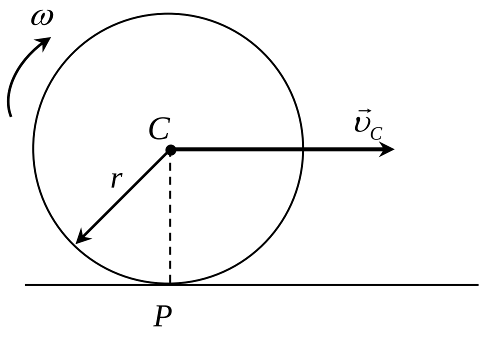
Alnan deňlikdäki $\sum m_k$ ululyk-jisimiň massasy, $\sum m_k \cdot h_k^2$ ululyk-jisimiň CP oka görä inersiýa momenti. Bu deňlikdäki $\sum m_k \cdot \vec{\upsilon}'_k$ ululyk nol wektor, $\sum m_k \cdot \vec{\upsilon}'_k = \vec{0}$, sebäbi bu ululyk jisimiň, onuň massalar merkezinden geçýän CP okuň daşyndan aýlanmasyndaky hereket mukdary. Şeýlelik bilen, umumy ýagdaýda jisimiň kinetik energiýasy

$$T = M \cdot \frac{\upsilon_c^2}{2} + I_{CP} \frac{\omega^2}{2} \qquad (40.6)$$

formula bilen kesgitlenýär.

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. Göni ýolda typman tigirlenýän silindriň kinetik energiýasyny tapmaly

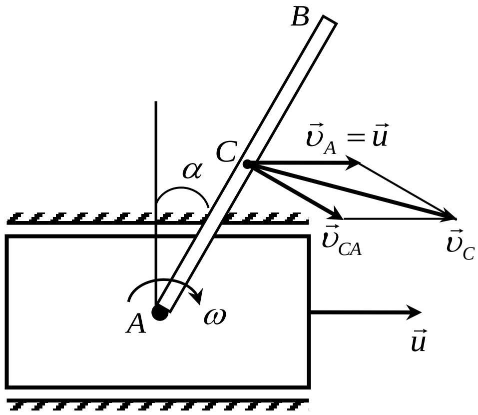


40.3-nji surat

Çözülişi. Seredilýän hereket tekiz-parallel hereket. P-tizlikleriň pursatdaky merkezi. Diýmek, $\upsilon_C = \omega \cdot r$. Onda (40.5) formuladan taparys:

$$T = m\frac{\upsilon_C^2}{2} + I_C\frac{\omega^2}{2} = m\frac{\upsilon_C^2}{2} + \frac{1}{4}m \cdot r^2\left(\frac{\upsilon_C}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m \cdot \upsilon_C^2.$$

Mysal. Mehanizm $\vec{u}$ tizlikli öňe bolan hereketdäki detaldan we bu detala şarnirli berkidilen m massaly, l uzynlykly AB sterženden ybarat. AB steržen A nokadyň daşynda ω burç tizlikli aýlanýar. Sterženiň kinetik energiýasyny kesgitlemeli.



40.4-nji surat

Çözülişi. Sterženiň hereketi – tekiz-parallel hereket. Onda

$$T = m\frac{\upsilon_C^2}{2} + I_C\frac{\omega^2}{2}$$

bu ýerde, C-sterženiň massalar merkezi. C nokadyň tizligi iki tizlikden ybarat

$$\vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon}_{CA} + \vec{\upsilon}_A \ ; \ \upsilon_{CA} = \omega \cdot \frac{l}{2} \ , \ \upsilon_A = u.$$

Diýmek,

$$\upsilon_C^2 = \upsilon_{CA}^2 + \upsilon_A^2 + 2\upsilon_{CA} \cdot \upsilon_A \cos\alpha = \frac{\omega^2 l^2}{4} + u^2 + 2 \cdot \frac{\omega l}{2} \cdot u \cos\alpha$$

Bilşimiz ýaly, $I_C = \frac{1}{12}ml^2$. Netijede tapylan ululyklary $\left(\upsilon_C^2, I_C\right)$ kinetik energiýanyň formulasynda ornuna goýup taparys:

$$T = \frac{mu^2}{2} + \frac{ml^2\omega^2}{6} + \frac{ml\omega u\cos\alpha}{2}$$

40.3. Mehaniki sistemanyň kinetik energiýsynyň üýtgemegi hakynda teorema.

29–njy paragrafda subut edilen, material nokadyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teoremany mehaniki sistemanyň her bir nokady üçin ulanalyň. Sistemanyň m_k massaly, υ_k tizlikli nokady üçin

$$d\left(\frac{m_k\upsilon_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i \tag{40.7}$$

deňligi alarys, bu ýerde dA_k^e, dA_k^i – degişlilikde nokada täsir edýän daşky we içki güýçleriň elementar işi.

Mehaniki sistemanyň her bir nokady üçin ýazylan (40.7) deňlemeleri özara goşup alarys:

$$d\sum\frac{m_k\upsilon_k^2}{2} = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \tag{40.8}$$

ýa-da

$$d\,T = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \tag{40.9}$$

Alnan (40.9) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

Sistemanyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teorema (differensial görnüşi).

Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň differensialy, sistemanyň daşky we içki güýçleriniň elementar işleriniň jemine deň.

(40.9) deňligi degişli çäklerde integrirläp alarys:

$$T - T_0 = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i\ , \tag{40.10}$$

bu ýerde T_0–sistemanyň başlangyç pursatdaky kinetik energiýasy.

(40.10) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

Mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakynda teorema.

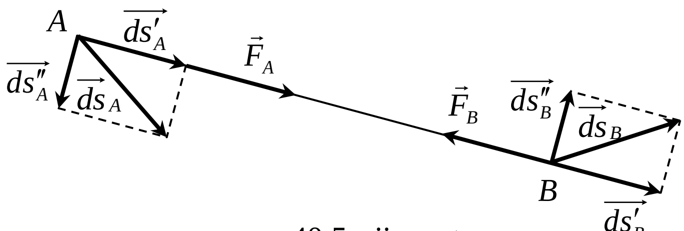
Mehaniki sistemanyň käbir orunüýtgemesinde onuň kinetik energiýasynyň üýtgemegi sistemanyň daşky we içki güýçleriniň bu orunüýtgemedäki işleriniň jemine deňdir.

Käbir hususy hallara seredip geçeliň.

1. Üýtgemeýän sistema.

Eger mehaniki sistemanyň islendik iki nokadynyň arasyndaky uzaklyk hereketiň dowamynda üýtgemeýän bolsa, onda bu sistema **üýtgemeýän sistema** diýilýär.

Goý, A we B üýtgemeýän sistemanyň nokatlary bolsun. $\vec{F}_A, \vec{F}_B - A, B$ nokatlaryň özara täsir güýçleri. Elbetde, $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ (dinamikanyň III kanuny).



40.5-nji surat

Sistema orunüýtgeme bereliň. $\overrightarrow{ds_A}$, $\overrightarrow{ds_B}$ –degişlilikde A,B nokatlaryň orunüýtgemesi. Bu orunüýtgemeleri düzüjilere dargadalyň: $\overrightarrow{ds_A} = \overrightarrow{ds'_A} + \overrightarrow{ds''_A}$, $\overrightarrow{ds_B} = \overrightarrow{ds'_B} + \overrightarrow{ds''_B}$

$\overrightarrow{ds'_A}$, $\overrightarrow{ds'_B}$ –AB göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan düzüjiler.

$\overrightarrow{ds''_A}$, $\overrightarrow{ds''_B}$ –AB göni çyzyga perpendikulýar ugur boýunça ugrukdyrylan düzüjiler.

$\vec{F}_A \perp \overrightarrow{ds''_A} \Rightarrow \vec{F}_A$ güýjüň $\overrightarrow{ds''_A}$ orunüýtgemede işi nola deň. Şuňa meňzeşlikde, $\vec{F}_B \perp \overrightarrow{ds''_B} \Rightarrow \vec{F}_B$ güýjüň $\overrightarrow{ds''_B}$ orunüýtgemede işi nola deň.

Diýmek, $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ güýçler degişlilikde $\overrightarrow{ds'_A}$ we $\overrightarrow{ds'_B}$ orunüýtgemelerde iş edýärler. Onda:

$$dA(\vec{F}_A) + dA(\vec{F}_B) = F_A \cdot ds'_A - F_B \cdot ds'_B = [AB = const, ds'_A = ds'_B, F_A = F_B] = 0$$

Bu deňlik üýtgemeýän sistemanyň beýleki nokatlary üçin hem ýerine ýetýär. Diýmek, üýtgemeýän sistemanyň içki güýçleriniň işleriniň jemi nola deň. Onda üýtgemeýän sistema üçin (40.9) we (40.10) deňlikler degişlilikde aşakdaky görnüşlere eýe bolarlar:

$$dT = \sum dA_k^e \tag{40.11}$$

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{40.12}$$

2. Ideal baglanyşyklary bolan sistema.

Goý, mehaniki sistema goýlan baglanyşyklar stasionar bolsun (wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär). Sistemanyň nokadyna täsir edýän daşky we içki güýçleriň deňtäsiredijisini aktiw güýç diýip atlandyralyň. Sistema täsir edýän güýçleri, aktiw güýçlere we reaksiýa güýçlere böleliň. Onda (40.9) deňlik

$$d\,T = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r$$

görnüşde bolar. Bu ýerde dA_k^a-sistemanyň nokadyna täsir edýän aktiw güýjüň elementar işi, dA_k^r-sistemanyň nokadyna täsir edýän reaksiýa güýçleriniň elementar işi.

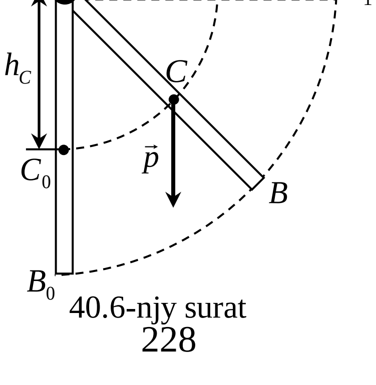
Goý, sistemanyň baglanyşyklarynyň reaksiýa güýçleriniň elementar işleriniň jemi nola deň bolsun. Şeýle baglanyşyklara **ideal baglanyşyklar** diýilýär. Bu görnüşli baglanyşyklaryň üstünde 49–njy paragrafda giňişleýin durup geçeris. Onda $\sum dA_k^r = 0$ bolsa, (40.9) we (40.10) deňlikler

$$d\,T = \sum dA_k^a \tag{40.13}$$

$$T = \sum A_k^a \tag{40.14}$$

görnüşe gelerler. Şeýlelik bilen, ideal we wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýän baglanyşyklary bolan mehaniki sistemanyň kinetik energiýasynyň sistemanyň käbir orunüýtgemesinde üýtgemegi sistemanyň aktiw güýçleriniň işleriniň jemine deňdir.
Käbir mysallara seredeliň.

Mysal. Uzynlygy l bolan AB steržen A şarnire wertikal ýagdaýda asylan. Gorizontal ýagdaýa eýe bolmagy üçin steržene nähili minimal ω_0 burç tizligini bermeli.



40.6-njy surat

Çözülişi. Seredilýän sistema (steržen)-üýtgemeýän sistema. (40.12) formuladan peýdalanalyň

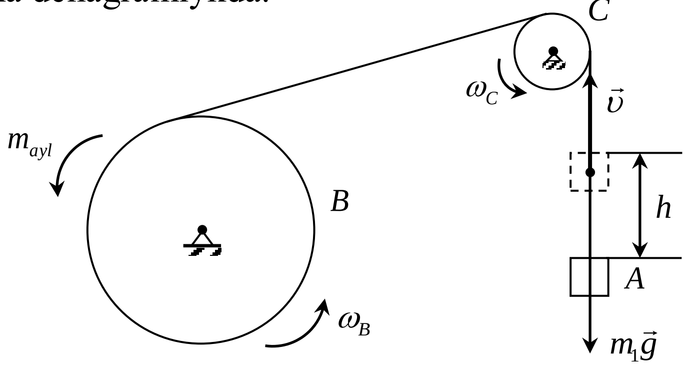
$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (*)$$

Gorizontal ýagdaýda sterženiň burç tizligi $\omega = 0$. Başlangyç pursatda sterženiň kinetik energiýasy $T_0 = I_A \frac{\omega_0^2}{2}$, bu ýerde I_A–sterženiň A nokatdan geçýän, çyzgynyň tekizligine perpendikulýar oka görä inersiýa momenti, ýagny $I_A = \frac{1}{3} m l^2$. Goýlan baglanyşyk-ideal (şarnir). Diýmek, işi $\vec{P} = m\vec{g}$ agyrlyk güýji ýerine ýetirýär we $A^e = -mgh_c = -mg\frac{l}{2}$. Kesgitlenen ululyklary (*) deňlemede ýerine goýup taparys:

$$-\frac{ml^2\omega_0^2}{6} = -mg\frac{l}{2},$$

bu ýerden $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

Mysal. 40.7-nji suratda göteriji mehanizm şekillendirilen (lebýotka); m_1 massaly “A” jisim "C" blogyň üstünden geçirilen ýüp bilen göterilýär. Ýüp R radiusly, m_2 massaly "B" barabana oralan. Barabana $m_{ayl} = a\varphi^2$ aýlandyryjy moment goýlan, $a = const$. “A” jisim h beýiklige çykanda onuň tizligini kesgitlemeli. "B" barabanyň massasy gyraky nokatlarynda jemlenen. "C" blok m_3 massaly disk. Başlangyç pursatda sistema deňagramlykda.



40.7-nji surat

(40.12) formuladan peýdalanalyň

$$T - T_0 = \sum A_k^e \qquad (**)$$

Sistema=jisim+blok+baraban

Sistemanyň kinetik energiýasy $T = T_A + T_C + T_B$. Bu ýerde T_A-"A" jisimiň kinetik energiýasy; T_C-"C" bloguň kinetik energiýasy; T_B-"B" barabanyň kinetik energiýasy;
Sistema girýän jisimleriň hereketleri:
"A" jisimiň hereketi öňe bolan hereket; "C" bloguň hereketi aýlanma hereket; "B" barabanyň hereketi hem aýlanma hereket.
Diýmek,

$$T_A = \frac{m_1 \cdot \upsilon^2}{2},$$

$$T_C = I_C\frac{\omega_C^2}{2} = \left[\omega_C = \frac{\upsilon}{r}\right] = \frac{1}{2}m_3\cdot r^2\frac{\upsilon^2}{2r^2} = \frac{1}{4}m_3\cdot\upsilon^2 ,$$

bu ýerde r-bloguň radiusy,

$$T_B = I_B\frac{\omega_B^2}{2} = \left[\omega_B = \frac{\upsilon}{R}\right] = m_2\cdot R^2\frac{\upsilon^2}{2R^2} = \frac{1}{2}m_2\cdot\upsilon^2 .$$

Onda sistemanyň kinetik energiýasy $T = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_3}{2} + m_2\right)\upsilon^2$ ululyga deň bolar. Başlangyç pursatda sistemanyň deňagramlykda bolandygy sebäpli, $T_0 = 0$.

Sistema goýlan baglanyşyklar–ideal baglanyşyklar (barabanyň şarniri, bloguň şarniri). Onda seredilýän orunüýtgemede edilen iş agyrlyk güýjüniň we aýlandyryjy momentiň işinden ybarat

$$A = A_{m_1\bar{g}} + A_{m_{ayl}}$$

$$A_{m_1\bar{g}} = -m_1 g\cdot h$$

“A” jisim h aralyga göterilende “B” baraban $\varphi = \frac{h}{R}$ burça aýlanýar. Diýmek,

$$A_{m_{ayl}} = \int_0^{\frac{h}{R}} a\cdot\varphi^2 d\varphi = a\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{h}{R}} = a\frac{h^3}{3R^3}$$

Tapylan ululyklary (**) deňlemede ýerine goýup, $\frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_3}{2} + m_2\right)\cdot\upsilon^2 =$

$= \frac{a\cdot h^3}{3R^3} - m_1 gh$ deňlemäni alarys.

Bu deňlemeden $\upsilon = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{ah^3}{3R^3} - m_1 gh}}{\sqrt{2m_1 + 2m_2 + m_3}}$

Bellik. Meselede seredilen barabanyň we bloguň agyrlyk güýçleri gozganmaýan nokatlarda goýlan. Şu sebäpli bu güýçleriň işi nola deň.

§41. Mehaniki sistemanyň potensial meýdanda hereketi.

Goý, $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, M_n(x_n, y_n, z_n)$ material nokatlar sistemasy käbir güýç meýdanynda ýerleşýän bolsun. M_k nokada täsir edýän $\vec{F}_k$ güýç diňe sistemanyň nokatlarynyň koordinatalaryna bagly, ýagny $\vec{F}_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ güýçleriň düzüjileri $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ koordinatalara bagly üznüksiz funksiýalar bolsun:

$$\begin{cases} F_{kx} = F_{kx}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \\ F_{ky} = F_{ky}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \quad k = \overline{1,n} \\ F_{kz} = F_{kz}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

30–njy paragrafda material nokat üçin aýdylanlary umumylaşdyryp, sistema üçin girizeliň.

Kesgitleme. Sistemanyň nokatlarynyň koordinatalaryna bagly, x_k, y_k, z_k koordinatalar boýunça önümi $\vec{F}_k$ funksiýanyň degişli düzüjisine deň bolan $U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n)$ funksiýa güýç meýdanynyň **güýç funksiýasy** diýilýär, ýagny

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = F_{kx}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_k} = F_{ky}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_k} = F_{kz}, \quad \left(k = \overline{1, n}\right) \tag{41.1}$$

Eger şeýle funksiýa bar bolsa, onda güýç meýdanyna **potensial meýdan** diýilýär.

$\vec{F}_k$ funksiýalaryň elementar işleriniň jemini hasaplasak,

$$\sum_{k=1}^{n} dA_{F_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}dy_k\right) = dU \tag{41.2}$$

bolar, ýagny meýdan güýçleriniň elementar işleriniň jemi güýç funksiýasynyň doly differensialyna deň.

Diýmek, mehaniki sistema (I) ýagdaýdan (II) ýagdaýa geçende $\vec{F}_k$ güýçleriň işleriniň jemi

$$\sum_{k=1}^{n} A_{F_k} = \int_{(I)}^{(II)} dU = U_2 - U_1 \tag{41.3}$$

bolar, bu ýerde U_1, U_2-güýç funksiýasynyň mehaniki sistemanyň (I), (II) ýagdaýlaryndaky bahalary. Mysal hökmünde agyrlyk meýdanynyň güýç funksiýasyny kesgitläliň. Z oky wertikal ýokary ugrukdyrsak, agyrlyk güýçleriniň düzüjileri $F_{kx} = 0$, $F_{ky} = 0$, $F_{kz} = -m_k g$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ bolar. Onda

$$dU = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}dx_k + F_{ky}dy_k + F_{kz}dz_k\right) = -\sum_{k=1}^{n} m_k g\, dz_k = -g\sum_{k=1}^{n} m_k\, dz_k .$$

Bu aňlatmany integrirläp alarys: $U = -g\sum_{k=1}^{n} m_k z_k + const$. Bilşimiz ýaly, $\sum_{k=1}^{n} m_k z_k = M \cdot z_C$, bu ýerde M –sistemanyň massasy, $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$, z_C–sistemanyň massalar merkeziniň koordinatasy. Şeýlelik bilen,

$$U = -Mgz_C + const \tag{41.4}$$

Mehaniki sistemanyň potensial energiýasy düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Mehaniki sistemanyň berlen ýagdaýyndaky potensial energiýasy diýlip, sistema şu ýagdaýyndan käbir “nol” ýagdaýa geçende $\vec{F}_k$ meýdan güýçleriniň işleriniň jemine aýdylýar.

Potensial energiýany Π bilen belgilesek, (41.3) deňligiň esasynda

$$\Pi = U_0 - U \tag{41.5}$$

deňligi alarys, bu ýerde $U_0 = U\left(x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0, ..., x_n^0, y_n^0, z_n^0\right)$–sistemanyň “nol” ýagdaýynda güýç funksiýasynyň bahasy.

“Nol” ýagdaý hökmünde mehaniki sistemanyň islendik ýagdaýyny alyp bolar. Adatça, “nol” ýagdaý hökmünde güýç funksiýasynyň maksimal baha eýe bolan ýeri alynýar. Sebäbi bu ýagdaýda $U_0 - U$ ululyk položitel bolýar.

Mehaniki sistema potensial meýdanda hereket edende, sistemanyň kinetik energiýasynyň üýtgemegi hakyndaky teoremadan we (41.3) formuladan alarys:

$$T_2 - T_1 = U_2 - U_1 \tag{41.6}$$

Mehaniki sistemanyň (I), (II) ýagdaýlarynda potensial energiýasyny Π_1, Π_2 bilen belgiläp, (41.5) deňlikden $\Pi_1 = U_0 - U_1$, $\Pi_2 = U_0 - U_2$ deňlikleri alarys. Bu ýerden, $U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2$. Onda (41.6) formulany $T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2$ ýa-da $T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$ görnüşde ýazyp bileris, ýagny

$$T + \Pi = const \tag{41.7}$$

Alnan (41.7) deňlik mehaniki energiýanyň saklanmak kanunynyň mazmunyny aňladýar.

Mehaniki sistema potensial meýdanda hereket edende, sistemanyň doly energiýasy diýlip atlandyrylýan, kinetik we potensial energiýalarynyň jemi hemişelikdir.

§42. Mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipi.

1. **Mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipi.**
2. **Inersiýa güýçleriniň baş wektory we baş momenti.**

Şu wagta çenli seredilen meseleler dinamikanyň kanunlaryny häsiýetlendirýän deňlemeleriň ýa-da bu kanunlardan gelip çykýan teoremalaryň esasynda çözüldi. Emma bu ýeke-täk ýol däl. Sistemanyň hereket deňlemelerini ýa-da deňagramlyk şertlerini *mehanikanyň prinsipleri* diýip atlandyrylýan umumy taglymatlaryň esasynda alyp bolýar. Şu paragrafda bu prinsipleriň biri, ýagny *Dalamberiň prinsipi* we onuň ulanylyşy bilen tanyşarys.

42.1. Mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipi.

Material nokat üçin Dalamberiň prinsipi bilen öň tanyşypdyk. Bu prinsipe laýyklykda, material nokada täsir edýän goýlan güýç, reaksiýa güýji we nokadyň inersiýa güýji deňagramlaşýarlar.

n sany material nokatdan ybarat bolan mehaniki sistema seredeliň. Bu sistemanyň m_k massaly nokadyna aýratynlykda seredeliň. Belgilemeleri girizeliň:

$\vec{F}_k^e - m_k$ massaly nokada täsir edýän daşky güýçleriň deňtäsiredijisi;

$\vec{F}_k^i - m_k$ massaly nokada täsir edýän içki güýçleriň deňtäsiredijisi;

$\vec{F}_k^{in} - m_k$ massaly nokadyň inersiýa güýji; $\vec{F}_k^{in} = -m_k \vec{a}_k$; $\vec{a}_k$ -nokadyň tizlenmesi.

Dalamberiň prinsipiniň esasynda material nokat üçin

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{in} = \vec{0} \tag{42.1}$$

deňligi alarys. (42.1) deňleme $\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i, \vec{F}_k^{in}$ güýçleriň deňagramlaşan güýçler sistemasyny düzýändiklerini aňladýar.

Ýokarda aýdylanlary sistemanyň her bir nokady üçin ulanyp **mehaniki sistema üçin Dalamberiň prinsipi** diýlip atlandyrylýan netijäni alarys.

Islendik wagt pursatynda mehaniki sistemanyň nokatlaryna daşky we içki güýçlerden daşary degişli inersiýa güýçleri goýulsa, deňagramlaşan güýçler sistemasy alynýar; diýmek, bu sistema üçin statikanyň deňlemelerini ulanyp bolýar. $\vec{F}_k^{in} = -m_k \cdot \vec{a}_k$ deňligi ulansak, (42.1) deňlemeden mehaniki sistemanyň hereketini häsiýetlendirýän (36.1) deňlemäni alarys. Diýmek, dinamikanyň ikinji kanunyndan gelip çykýan (36.1) deňlemäni Dalamberiň prinsipinden hem alyp bolýar.

42.2. Inersiýa güýçleriniň baş wektory we baş momenti.

Statikadan belli bolşy ýaly, deňagramlaşan güýçler sistemasyna girýän güýçleriň wektorlaýyn jemi we bu güýçleriň islendik *O* merkeze görä momentleriniň wektorlaýyn jemi nola deň bolmaly. Onda Dalamberiň prinsipine laýyklykda

$$\begin{cases} \sum\left(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{in}\right) = \vec{0}\ , \\ \sum\left(\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^{in}\right)\right) = \vec{0} \end{cases} \tag{42.2}$$

bolmaly ýa-da mehaniki sistemanyň içki güýçleriniň häsiýetini göz öňünde tutup (jübüt-jübütden garşylykly ugrukdyrylan, ululyklary boýunça deň) alarys:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^{in} = \vec{0}\ , \\ \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^{in}\right) = \vec{0}\ . \end{cases} \tag{42.3}$$

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\sum \vec{F}_k^{in} = \vec{R}^{in} \quad , \quad \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^{in}\right) = \vec{M}_0^{in} \tag{42.4}$$

$\vec{R}^{in}, \vec{M}_0^{in}$ wektor ululyklar degişlilikde inersiýa güýçler sistemasynyň **baş wektory** we *O* merkeze görä **baş momenti** diýlip atlandyrylýarlar. Girizilen belgilemeleri ulanyp, (42.3) deňlemäni

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^{in} = \vec{0}\ , \\ \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{M}_0^{in} = \vec{0} \end{cases} \tag{42.5}$$

görnüşde ýazyp bileris. Manysy boýunça (42.5) deňleme mehaniki sistemanyň hereket mukdarynyň we kinetik momentiniň üýtgemegi hakyndaky teoremalary häsiýetlendirýän deňlemelere deňgüýçli. (42.5) deňlemeden peýdalanmak üçin inersiýa güýçler sistemasynyň baş wektorynyň we baş momentiniň görnüşini bilmeli. (42.5) deňlemä girýän birinji deňligi mehaniki sistemanyň massalar merkeziniň hereketini häsiýetlendirýän $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$ deňlik bilen deňeşdirip alarys:

$$\vec{R}^{in} = -M\vec{a}_C\ , \tag{42.6}$$

bu ýerde *M*-mehaniki sistemanyň massasy, *C*-mehaniki sistemanyň massalar merkezi, ýagny mehaniki sistemanyň inersiýa güýçleriniň baş wektory sistemanyň massalar merkeziniň tizlenmesine garşylykly, ululygy boýunça sistemanyň massasynyň massalar merkeziniň tizlenmesine köpeltmek hasylyna deň. Eger, a_C–ni galtaşýan we normal düzüjilere dargatsak, inersiýa güýçleriň baş wektorynyň düzüjileri

$$\vec{R}_\tau^{in} = -M\vec{a}_{C_\tau} \quad , \quad \vec{R}_n^{in} = -M \cdot \vec{a}_{C_n} \tag{42.7}$$

deňlik bilen kesgitlener. $\vec{R}_n^{in}$-düzüjä merkezden gaýdýan inersiýa güýji, $\vec{R}_\tau^{in}$-düzüjä bolsa galtaşma inersiýa güýji diýilýär.

(42.5) deňlemä girýän ikinji deňligi sistemanyň kinetik momentiniň üýtgemegi hakyndaky teoremany häsiýetlendirýän $\frac{d\overrightarrow{K_0}}{dt} = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right)$ deňleme bilen deňeşdirip taparys:

$$\overrightarrow{M}_0^{in} = -\frac{d\overrightarrow{K_0}}{dt} \tag{42.8}$$

Şeýle-de, $\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right)$ deňlemäni göz öňünde tutup,

$$M_z^{in} = -\frac{dK_z}{dt} \tag{42.9}$$

deňligi alarys.

7-nji paragrafa laýyklykda (güýçler sistemasyny merkeze getirmek) inersiýa güýçler sistemasyny O merkezde goýlan $\vec{R}^{in}$ güýje we $\vec{M}_0^{in}$ momentli bir jübüte getirip bolýar.

Inersiýa güýçleriniň merkeze getirilişiniň käbir hususy halatlaryna seredip geçeliň.

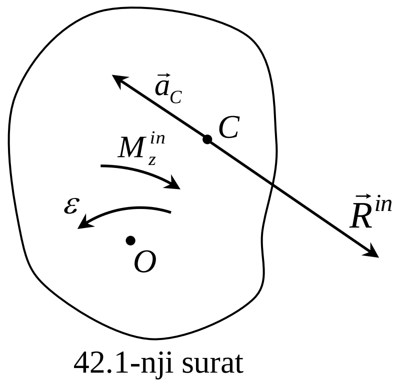
1. Öňe bolan hereket.

Öňe bolan hereket edýän gaty jisimiň ähli nokatlarynyň tizlenmeleri massalar merkeziniň tizlenmesine deň. Onda $\vec{F}_k^{in} = -m_k\vec{a}_C$ inersiýa güýçler parallel güýçler sistemasyny emele getirýärler we bu sistemanyň massalar merkezinde goýlan deňtäsiredijisi bar. Diýmek, öňe bolan hereketde gaty jisimiň inersiýa güýçleri massalar merkezinde goýlan $\vec{R}^{in}$ güýje getirilýär.

2. Aýlanma hereketi.

Goý, birjynsly gaty jisimiň α simmetriýa tekizligi bolup, jisim bu tekizlige perpendikulýar z okuň daşyndan aýlanýan bolsun.

42.1-nji suratda jisimiň α tekizlik bilen alynýan kese-kesigi şekillendirilen.



42.1-nji surat

O-z ok bilen α tekizligiň kesişme nokady; C-jisimiň massalar merkezi.

Eger inersiýa güýçlerini O merkeze getirsek, jisimiň simmetrikdigi sebäpli jemleýji güýç we jemleýji jübüt α tekizliginde ýatarlar. Onda $L_z = I_z \cdot \omega$ deňligi göz öňünde tutup, (42.9) formuladan taparys:

$$M_z^{in} = -I_z\frac{d\omega}{dt}$$

ýa-da

$$M_z^{in} = -I_z \cdot \varepsilon \tag{42.10}$$

Diýmek, aýlanma hereket edýän simmetrik görnüşli jisimiň inersiýa güýçleri (42.6) formula bilen kesgitlenýän $\vec{R}^{in}$ güýje we (42.10) formula bilen kesgitlenýän momentli jübüte getirilýär.

3. Jisimiň massalar merkezinden geçýän okuň daşynda aýlanma hereketi.

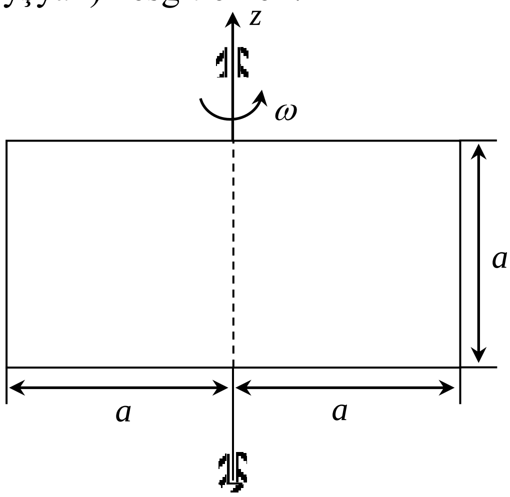
Goý, ýokarda agzalan simmetrik görnüşli gaty jisim massalar merkezinden geçýän z okuň daşynda aýlanýan bolsun. Bu ýagdaýda $\vec{R}^{in} = \vec{0}$ (sebäbi $\vec{a}_C = \vec{0}$) we inersiýa güýçleri simmetriýa tekizliginde ýatýan M_z^{in} momentli jübüte getirilýär.

4. Tekiz-parallel hereket.

Goý, jisimiň simmetriýa tekizligi bolup, jisim bu tekizlige parallel hereket edýän bolsun. Onda jisimiň inersiýa güýçleri simmetriýa tekizliginde ýatýan, massalar merkezinde goýlan $\vec{R}^{in} = -m \cdot \vec{a}_C$ güýje we $M_z^{in} = -I_z \cdot \varepsilon$ momentli jübüte getirilýär, bu ýerde z-massalar merkezinden geçip, simmetriýa tekizligine perpendikulýar ok.

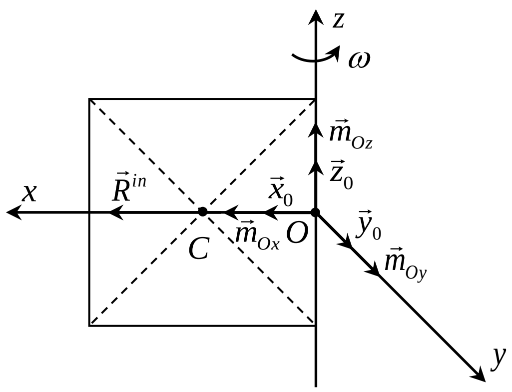
Dalamberiň prinsipiniň ulanylyşynyň bir mysalyna seredip geçeliň.

Mysal. Birjynsly m massaly gönüburçluk (plastina) z okuň daşyndan deňölçegli $(\omega = const)$ aýlanýar. Gönüburçlugyň z ok boýunça kese-kesiginde döreýän güýji (gönüburçlugy bölmäge çalyşýan) kesgitlemeli.



42.2-nji surat

Çözülişi. $Oxyz$ koordinatalar sistemasyny plastina bilen baglalyň. Gözlenilýän güýç içki güýç bolup durýar. Emma plastinany z oky boýunça bölüp (hyýaly), sag bölegini we waly aýyrsak, gözlenilýan güýç daşky güýç bolar.



42.3-nji surat

"Taşlanan" bölegiň galan ýarymplastina edýän täsirini we walyň reaksiýa güýçlerini O merkeze getireliň. Şeýlelikde, $\vec{F} = (x_0, y_0, z_0)$ güýç we $\vec{m}_0 = (m_{Ox}, m_{Oy}, m_{Oz})$ momentli jübüt alnar.

Dalamberiň prinsipini ulanalyň. Munuň üçin ýarymplastinanyň bölejikleriniň inersiýa güýçlerini goýalyň. Aýlanma hereketiniň deňölçeglidigi sebäpli, bölejikleriň diňe normal tizlenmeleri bar. Bu tizlenmeler Ox okuna parallel bolup, Oz oka tarap ugrukdyrylan. Inersiýa güýçleri degişli normal tizlenmelere garşylykly ugrukdyrylan. Plastinanyň birjynslydygy sebäpli inersiýa güýçleriniň sistemasy O nokatda goýlan, Ox oky boýunça ugrukdyrylan, ululygy boýunça

$$R^{in} = \frac{m}{2} a_C^n = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4} m\omega^2 a$$

deň güýje getirilýär. Ähli güýçleri Ox oka proýektirläp kesgitläris:

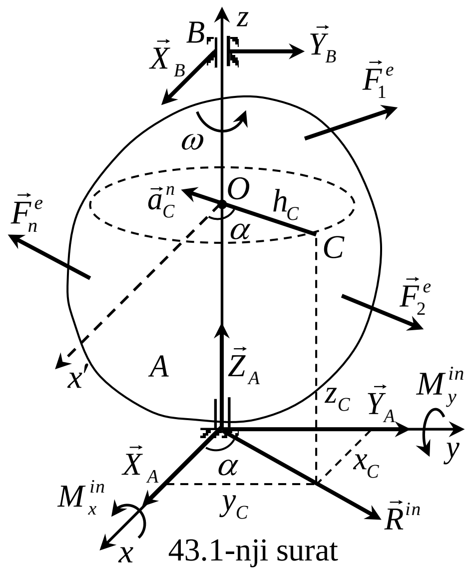
$$x_0 + R^{in} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -R^{in}$$

ýa-da $x_0 = -\frac{1}{4} m\omega^2 a$.

§43. Dinamiki reaksiýa güýçlerini kesgitlemek.

Öňki paragrafda getirilen Dalamberiň prinsipiniň dinamiki (hereketde ýüze çykýan) reaksiýa güýçlerini kesgitlemek üçin ulanylyşy bilen tanyşalyň.

Goý, gaty jisim gozganmaýan z okuň daşunda $\omega = const$ burç tizlikli aýlanýan bolsun. A nokatdaky dabanoýda (podpýatnik) we B nokatdaky şarnirde döreýän reaksiýa güýçlerini, ýagny $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ güýçleriň ululyklaryny kesgitlemeklik meselesini goýalyň.



43.1-nji surat

Goý, jisime $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, ..., \vec{F}_n^e$ berlen güýçler täsir edýän bolsun. Bu güýçleriň baş wektoryny $\vec{R}^e$ bilen belgiläliň, ýagny

$$\vec{R}^e = \sum \vec{F}_k^e$$

Baş wektoryň düzüjileri degişlilikde, $R_x^e = \sum F_{kx}^e$, $R_y^e = \sum F_{ky}^e$, $R_z^e = \sum F_{kz}^e$.

$\vec{F}_k^e$ $(k = \overline{1,n})$ güýçleriň koordinata oklaryna görä baş momentlerini M_x^e, M_y^e, M_z^e bilen belgiläliň. Onda $M_x^e = \sum m_x(F_{kx}^e)$, $M_y^e = \sum m_y(F_{ky}^e)$, $M_z^e = \sum m_z(F_{kz}^e)$.

Jisimiň z okuň daşynda deňölçegli $(\omega = const)$ aýlanýandygy sebäpli $M_z^e = 0$ bolar. Sebäbi (39.6) formuladan $\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e)$, K_z–jisimiň kinetik moment, gozganmaýan z okuň daşynda aýlanýan jisimiň kinetik momenti $K_z = I_z \cdot \omega$. Onda ýokarda ýazylan formuladan $I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon = \sum m_z(\vec{F}_k^e)$ bolýandygyny alarys. Emma, $\varepsilon = 0$, diýmek, $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = M_z^e = 0$. $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ dinamiki reaksiýa güýçlerini kesgitlemek üçin jisimiň bölejikerine $\vec{F}_k^{in}$ inersiýa güýçleri bilen täsir edeliň. Inersiýa güýçlerini A merkeze getirip, A nokatda goýlan bir $\vec{R}^{in}$ güýji we momenti $\vec{M}_A^{in} = \sum \vec{m}_A(\vec{F}_k^{in})$ deň bolan jübüt alarys. Bu momentiň x,y,z oklara bolan proýeksiýalary degişlilikde,
$M_x^{in} = \sum m_x(\vec{F}_k^{in})$, $M_y^{in} = \sum m_y(\vec{F}_k^{in})$, $M_z^{in} = \sum m_z(\vec{F}_k^{in}) = 0$ $(\omega = const)$ bolar.

Dalamberiň prinsipi boýunça $\{\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^{in}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B\}$ güýçler sistemasy deňagramlaşan güýçler sistemasy bolup durýar. Bu sistema üçin deňagramlaşmak deňlemelerini ulanalyň:

$$\begin{cases} X_A + X_B + R_x^e + R_x^{in} = 0\,, \\ Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^{in} = 0\,, \\ Z_A + R_z^e + R_z^{in} = 0\,, \\ -Y_B \cdot AB + M_x^e + M_x^{in} = 0\,, \\ X_B \cdot AB + M_y^e + M_y^{in} = 0\,, \\ M_z^e + M_z^{in} = 0\,. \end{cases} \qquad (43.1)$$

Soňky deňleme toždestwolaýyn ýerine ýetýär $(M_z^e = M_z^{in} = 0)$. Inersiýa güýçleriniň baş wektory, $\vec{R}^{in} = m \cdot \vec{a}_C$. Bu ýerde m- jisimiň massasy; C-jisimiň massalar merkezi.

Burç tizligiň hemişelik ululykdygy $(\omega = const)$ sebäpli, massalar merkeziniň diňe normal tizlenmesi bar $a_C = a_C^n = \omega^2 \cdot h_C$, bu ýerde $h_C - C$ nokatdan aýlanma okuna çenli uzaklyk.

Belgileme girizeliň: x_C, y_C-massalar merkeziniň Ax, Ay oklar boýunça koordinatalary. $h_C \cdot \cos\alpha = x_C$, $h_C \cdot \sin\alpha = y_C$ deňlikleri göz öňünde tutup taparys:

$$R_x^{in} = m\omega^2 \cdot h_C \cdot \cos\alpha = m\omega^2 \cdot x_C\,,$$
$$R_y^{in} = m\omega^2 \cdot h_C \cdot \sin\alpha = m\omega^2 \cdot y_C\,,$$
$$R_z^{in} = 0\,.$$

M_x^{in}, M_y^{in} ululyklary kesgitlemek üçin jisimiň m_k massaly bir nokadyna aýratynlykda seredeliň. Bu nokadyň hem diňe

$$F^{in} = m_k \omega^2 \cdot h_k$$

deň bolan merkezden gaýdýan inersiýa güýji bolar. Bu ýerde h_k-nokatdan aýlanma okuna çenli uzaklyk. Nokadyň inersiýa güýjüniň düzüjileri:

$$F_{kx}^{in} = m_k\omega^2 \cdot x_k \ , \ F_{ky}^{in} = m_k\omega^2 \cdot y_k \ , \ F_{kz}^{in} = 0$$

Onda 6-njy paragrafda getirilen (6.4) formula boýunça alarys:

$$m_x\left(\vec{F}_k^{in}\right) = y_k \cdot F_{kz}^{in} - z_k \cdot F_{ky}^{in} = -z_k \cdot F_{ky}^{in} = -m_k\omega^2 y_k z_k \ ,$$

$$m_y\left(\vec{F}_k^{in}\right) = z_k \cdot F_{kx}^{in} - x_k \cdot F_{kz}^{in} = m_k\omega^2 x_k z_k \ .$$

$m_z\left(\vec{F}_k^{in}\right) = 0$ (sebäbi, $\vec{F}_k^{in}$ güýç z oky kesýär) .

Ýokarda getirilen deňlikleri jisimiň ähli nokatlary üçin düzüp, bu deňlikleri özara goşup, aşakdaky aňlatmalary alarys:

$$M_x^{in} = \left(-\sum m_k y_k z_k\right)\cdot \omega^2 = -I_{yz} \cdot \omega^2 \ , \qquad M_y^{in} = \left(\sum m_k x_k z_k\right)\cdot \omega^2 = I_{xz} \cdot \omega^2 \ . \qquad (43.2)$$

Bu ýerde I_{xz}, I_{yz} -jisimiň merkezden gaýdýan inersiýa momentleri.

Bu aňlatmalary (43.1) deňlemeler sistemasynda ýerine goýup,

$$\begin{cases} X_A + X_B = -R_x^e - m x_C \omega^2 , \\ Y_A + Y_B = -R_y^e - m y_C \omega^2 , \\ Z_A = -R_z^e \ , \\ X_B \cdot AB = -M_y^e - I_{xz} \cdot \omega^2 , \\ Y_B \cdot AB = M_x^e - I_{yz} \cdot \omega^2 \end{cases} \qquad (43.3)$$

deňlemeler sistemasyny alarys.

$\omega = 0$ bolanda (43.3) deňlemeler sitemasyndan alynýan reaksiýa güýçlerine *statiki reaksiýalar* diýlýär. Emma $\omega \neq 0$ bolup,

$$x_C = 0 \ , \ y_C = 0 \qquad (43.4)$$

$$I_{xz} = 0 \ , \ I_{yz} = 0 \qquad (43.5)$$

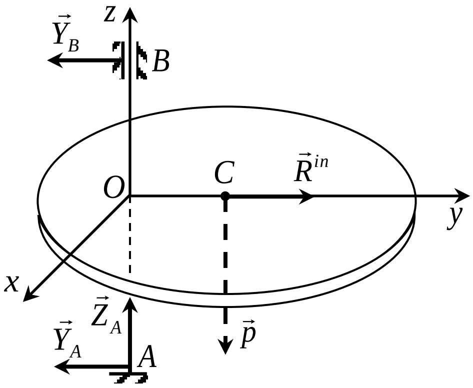
şertler ýerine ýetende, (43.3) deňlemelerden görnüşi ýaly, dinamiki reaksiýa güýçler statiki reaksiýa güýçlerine deň bolar. (43.4), (43.5) şertlere aýlanýan jisimiň *dinamiki deňagramlaşmak şertleri* diýilýär.

(43.4) deňlik jisimiň dinamiki deňagramlaşmagy üçin onuň massalar merkeziniň aýlanma okunda ýerleşmelidigini, (43.5) şert bolsa aýlanma okunyň koordinatalar başlangyjy bolan *A* nokatda baş inersiýa oky bolmalydygyny görkezýär.

Bellik. Dinamiki reaksiýa güýçlerini kesgitlemeklik meselesi çözülende gönüden-göni (43.3) deňlemeler ulanylmaýar. Her bir goýlan mesele üçin Dalamberiň prinsipini aýratynlykda ulanmaly.

Dinamiki reaksiýa güýçlerini kesgitlemekde Dalamberiň prinsipiniň ulanylyşynyň bir mysalyna seredip geçeliň.

Mysal. Diskiň aýlanma oky onuň tekizligine perpendikulýar bolup, diskiň *O* nokadyndan geçýär. $OC = b$, *C*-diskiň massalar merkezi. Diskiň agramy *P*, burç tizligi $\omega = const$. *A*,*B* nokatlardaky reaksiýa güýçlerini kesgitlemeli, $OA = OB = h$.



43.2-nji surat

Çözülişi. Disk bilen bagly *Oxyz* koordinatalar sistemasyny 43.2-nji suratda görkezilişi ýaly alalyň (*Oy* ok massalar merkezinden geçýär). *Oxy* tekizlik disk üçin simmetriýa tekizligi bolýanlygy sebäpli *Oz* ok *O* nokatda baş inersiýa oky bolup durýar. Onda $I_{xz} = I_{yz} = 0$ we (43.2) formuladan görşnüşi ýaly, $M_x^{in} = M_y^{in} = 0$. Bu ýerden $\vec{M}_O^{in} = \vec{0}$, ýagny inersiýa güýçler diňe bir *O* nokatda goýlan, *OC* göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan $\vec{R}^{in}$ deňtäsiredijä getirilýär. Ululygy boýunça $R^{in} = m \cdot a_C^n = \frac{P}{g} \cdot \omega^2 \cdot b$. $\vec{P}$ we $\vec{R}^{in}$ güýçleriň *Oyz* tekizlikde ýatýandygy sebäpli reaksiýa güýçleri hem bu tekizlikde ýatýarlar, ýagny *A* nokatda $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ güýçler, *B* nokatda $\vec{Y}_B$ güýç.

Dalamberiň prinsipiniň esasynda deňagramlyk deňlemelerini düzüp alarys:

$$\begin{cases} R^{in} - Y_A - Y_B = 0 \,, \\ Z_A - P = 0 \,, \\ Y_B \cdot 2h - P \cdot b - R^{in} \cdot h = 0. \end{cases}$$

Alnan deňlemeler sistemasyny çözüp taparys:

$$Y_B = P \cdot b\left(\frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2h}\right),$$

$$Y_A = P \cdot b\left(\frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{2h}\right),$$

$$Z_A = P.$$

11-nji BAP
Gaty jisimiň hereketiniň differensial deňlemesi.

Bu bapda gaty jisimiň hereketiniň görnüşine laýyklykda hereketiň differensial deňlemesini ýazarys we degişli mysallara seredip geçeris.
Bellik. Gaty jisimiň öňe bolan hereketi onuň bir nokadynyň (meselem, massalar merkezi) hereketi bilen kesgitlenýär, ýagny goýulýan mesele material nokadyň dinamikasyna syrykýar. Şu sebäpli bu bapda gaty jisimiň öňe bolan hereketine aýratynlykda serediljek däldir.

§44. Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketi.

Goý, gozganmaýan z (AB) okunyň daşyndan aýlanýan jisime $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, ..., \vec{F}_n^e$ daşky güýçler täsir edýän bolsun. Şol bir wagtda jisime dabanoýuň $\vec{R}_A$, şarniriň $\vec{R}_B$ reaksiýa güýçleri hem täsir edýär. Momentler teoremasyndan peýdalansak,

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{44.1}$$

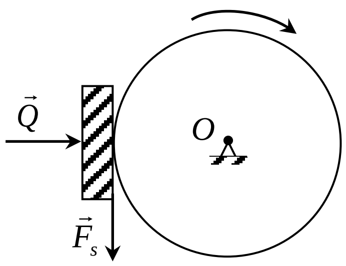
deňligi alarys. $\left(m_z\left(\vec{R}_A\right) = m_z\left(\vec{R}_B\right) = 0\right)$. (44.1) deňlikde $K_z = I_z \cdot \omega$-ny goýsak,

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{44.2}$$

ýa-da $\sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) = M_z^e$ şertli belgini girizsek,

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e \tag{44.3}$$

deňlemäni alarys;
bu ýerde φ-jisimiň aýlanma burçy. Alnan (44.2), (44.3) deňlemeler gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan jisimiň hereketiniň differensial deňlemesidir. Käbir mysallara seredip geçeliň.
Mysal. Massasy m bolan tigir O okuň daşyndan ω_0 burç tizlik bilen aýlanýar. Käbir wagt pursatynda tigiri togtadyjy kolodka $\vec{Q}$ güýç bilen gysylýar. Kolodkanyň tigire sürtülme koeffisiýenti f , tigiriň radiusy r. Tigiriň näçe wagtdan soň durjakdygyny kesgitlemeli.
Çözülişi.



44.1-nji surat

(44.2) deňlemäni ulanyp, $I_O \frac{d\omega}{dt} = -F_s \cdot r$ deňlemäni alarys; ýa-da $F_s = f \cdot Q$ deňligi ulansak, $I_O \frac{d\omega}{dt} = -f \cdot Q \cdot r$ deňlemäni alarys. Bu deňlemede üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edip, degişli çäklerde integrirläliň

$$I_O\, d\omega = -f \cdot Q \cdot r\, dt \ ,$$

$$I_O \int\limits_{\omega_0}^{\omega} dW = -f \cdot Q \cdot r \int\limits_0^t d\tau \ ,$$

$$I_O\, \omega - I_O \omega_0 = -f \cdot Q \cdot r \cdot t \ ,$$

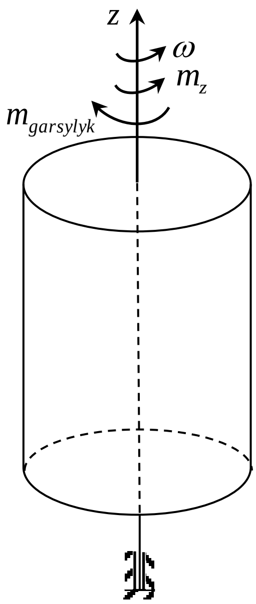
$$\omega = \frac{I_O \omega_0 - f \cdot Q \cdot r \cdot t}{I_O} \ .$$

ω burç tizligi nola deňläp, tigiriň näçe wagtdan durjakdygyny kesgitläris

$$\frac{I_O \omega_0 - f \cdot Q \cdot r \cdot t}{I_O} = 0 \ ,$$

bu ýerden $t = \dfrac{I_O \omega_0}{f\, Qr} = \dfrac{mr^2 \omega_0}{f\, Qr} = \dfrac{mr\omega_0}{f\, Q}$.

Mysal. Silindr $m_z = const$ aýlandyryjy momentiň täsirinde gozganmaýan z okuň daşyndan aýlanýar. Silindriň z oka görä inersiýa momenti I_z. Başlangyç burç tizligi $\omega_0 = 0$. Garşylyk güýçleriniň z oka görä momenti burç tizligine göni proporsional $m_{garsylyk} = \mu \cdot \omega$. Silindriň burç tizliginiň wagta bagly üýtgeýşini kesgitlemeli.



44.2-nji surat

(44.2) deňlemäniň esasynda silindriň aýlanma hereketiniň deňlemesini ýazalyň:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = m_z - \mu \cdot \omega$$

Üýtgeýän ululyklary aýyl-saýyl edeliň

$$\frac{I_z d\omega}{m_z - \mu \cdot \omega} = dt$$

Alnan deňligi degişli çäklerde integrirläliň:

$$I_z \int\limits_0^{\omega} \frac{dW}{m_z - \mu \cdot \omega} = \int\limits_0^t d\tau$$

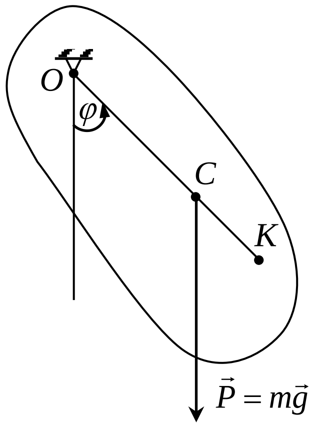
Bu ýerden käbir özgertmelerden soň $-\frac{I_z}{\mu}\ln\frac{m_z-\mu\cdot\omega}{m_z}=t$ deňlemäni alarys.

$-\frac{I_z}{\mu}=n$ belgilemäni girizip, $\frac{m_z-\mu\cdot\omega}{m_z}=e^{-nt}$ deňlemäni alarys. Bu deňlemeden $\omega=\frac{m_z}{\mu}\left(1-e^{-nt}\right)$. Görnüşi ýaly, silindriň burç tizligi wagtyň geçmegi bilen artýar we predel bahasy $\frac{m_z}{\mu}$ ululyga deň bolýar.

§45. Fiziki maýatnik.

Agyrlyk meýdanynda ýerleşýän, agyrlyk merkezinden geçmeýän gorizontal aýlanma oky bolan gaty jisime **fiziki maýatnik** diýilýär.

Fiziki maýatnigiň aýlanma okuna perpendikulýar we massalar merkezinden geçýän tekizlik bilen kese-kesigini şekillendireliň.



45.1-nji surat

Bu ýerde O-aýlanma oky bilen ýokarda agzalan tekizligiň kesişýän nokady,C-jisimiň massalar merkezi; $\vec{P}$-jisimiň agramy, φ-OC kesimiň wertikaldan gyşarma burçy. $OC=a$ belgilemäni girizeliň. I_O-maýatnigiň aýlanma okuna görä inersiýa momenti.

Fiziki maýatnigiň hereket deňlemesini kesgitlemek üçin bize belli bolan $I_z\ddot{\varphi}=M_z^e$ deňlemeden peýdalanalyň. Bu ýagdaýda $M_z^e=-P\cdot a\sin\varphi$. $\varphi>0$ bolanda moment otrisatel, $\varphi<0$ bolanda moment položitel.

Onda fiziki maýatnigiň herket deňlemesi $I_O\ddot{\varphi}=-P\cdot a\sin\varphi$ görnüşde bolar ýa-da $\frac{P\cdot a}{I_O}=k^2$ belgilemäni girizip,

$$\ddot{\varphi}+k^2\sin\varphi=0 \tag{45.1}$$

deňlemäni alarys. Alnan deňleme adaty funksiýalarda integrirlenmeýär. Emma maýatnigiň kiçi yrgyldylaryny öwrensek, $\sin\varphi\approx\varphi$ takmynan deňligi ulanyp, (45.1) deňlemäni

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0 \tag{45.2}$$

görnüşe getireris. Bu differensial deňlemä material nokadyň erkin yrgyldylaryny öwrenenimizde gabat gelipdik. Bu deňlemäniň umumy çözüwi

$$\varphi = A\cdot\sin(kt) + B\cdot\cos(kt) \qquad (45.3)$$

görnüşlidir; *A*,*B* islendik hemişelikler. Belli bolşy ýaly, *A*,*B* hemişelikleri kesgitlemek üçin başlangyç şertler ulanylýar. Goý, maýatnik kiçi φ_0 burça galdyrylyp, başlangyç burç tizliksiz $(\omega_0 = 0)$ goýberilen bolsun. Diýmek, $t = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$. (45.3) we

$$\dot{\varphi} = A\cdot k\cos(kt) - B\cdot k\sin(kt)$$

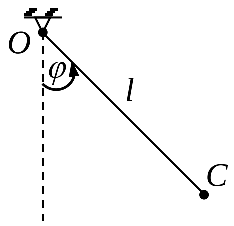
deňlikleri ulanyp taparys: $B = \varphi_0$, $A = 0$. Onda berlen başlangyç şertlerde maýatnigiň kiçi yrgyldylarynyň deňlemesini

$$\varphi = \varphi_0\cos(kt) \qquad (45.4)$$

görnüşde alarys. Kiçi yrgyldylaryň periody:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{P\cdot a}{I_0}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{P\cdot a}} \qquad (45.5)$$

Ýokarda aýdylanlar süýnmeýän ýüpüň ujuna berkidilen material nokat, ýagny matematiki maýatnik üçin hem degişlidir.



45.2-nji surat

Degişli ululyklary (45.5) formulada goýup, matematiki maýatnigiň periodynyň

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (45.6)$$

formula bilen kesgitlenýändigini taparys.

(45.5) we (45.6) formulalardan görnüşi ýaly, ýüpüň uzynlygyny

$$l_1 = \frac{I_0 g}{P\cdot a} = \frac{I_0}{ma} \qquad (45.7)$$

ululyga deň edip alsak, matematiki we fiziki maýatnikleriň periodlary özara deň bolar. Bu ýerde *m*–fiziki maýatnigiň massasy. l_1–ululyga *fiziki maýatnigiň getirme uzynlygy* diýilýär.

Fiziki maýatnigiň *O* asma nokadyndan $OK = l_1$ uzaklykdaky *K* nokada fiziki maýatnigiň yrgyldama merkezi diýilýär (45.1-nji surat).

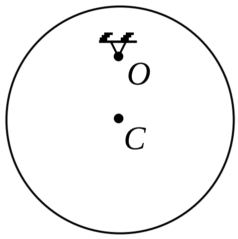
Gýuýgensiň teoremasyndan alynýan $I_0 = I_C + ma^2$ deňligi (45.7) formulada goýup, getirme uzynlyk üçin

$$l_1 = a + \frac{I_C}{ma} \qquad (45.8)$$

formulany alarys. (45.8) formuladan görnüşi ýaly,*OK* kesimiň uzynlygy *OC* kesimiň uzynlygyndan uly $(OC = a)$. Şeýlelikde, fiziki maýatnigiň yrgyldama merkezi onuň massalar merkezinden aşakda ýerleşýär.

Bir mysala seredeliň

Mysal. O nokatdan geçýän gorizontal aýlanma oky bolan diskiň getirme uzynlygyny kesgitlemeli, $CO = \frac{2}{3}R$, R-diskiň radiusy, C-diskiň merkezi.



45.3-nji surat

Çözülişi. Getirme uzynlygyny (45.7) formuladan kesgitläris. Diskiň O nokatdan geçýän aýlanma okuna görä inersiýa momentini kesgitlemek üçin Gýuýgensiň teoremasyndan peýdalanalyň:

$$I_0 = I_C + m \cdot OC^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m \cdot \left(\frac{2}{3}R\right)^2 = \frac{17}{18}mR^2.$$

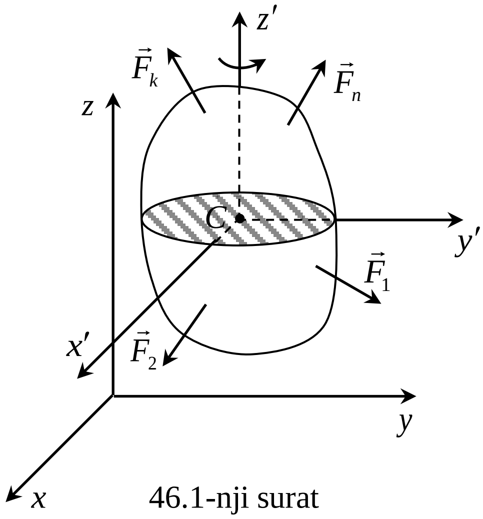
Onda (45.7) formuladan alarys:

$$l_1 = \frac{I_0}{ma} = \frac{\frac{17}{18}mR^2}{m \cdot \frac{2}{3}R} = \frac{17}{12}R.$$

§46. Gaty jisimiň tekiz-parallel hereketi.

Kinematikadan belli bolşy ýaly, tekiz-parallel hereket edýän gaty jisimiň nokatlary berkidilen tekizlige parallel tekizliklerde hereket edýär.

Goý, gaty jisim $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ güýçleriň täsirinde Oxy koordinatalar tekizligine parallel hereket edýän bolsun.



46.1-nji surat

C-jisimiň massalar merkezi;

$Cx'y'z'$ -öňe bolan hereket edýän koordinatalar sistemasy;

Cx' -Ox oka parallel;

Cy' -Oy oka parallel;

Cz' -Oz oka parallel.

Mälim bolşy ýaly, tekiz-parallel hereket edýän jisimiň ýerleşişi üç parametr bilen kesgitlenýär. Saýlanyp alnan nokadyň $(x;y)$ koordinatalary we bu nokatdan geçýän, xy tekizlige perpendikulýar okuň daşyndan aýlanma burçy.

Jisimiň hereketini C massalar merkeziniň koordinatalary we z' okuň daşyndan φ aýlanma burçy bilen kesgitläliň.

Mehaniki sistemanyň massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teoremadan alarys:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx} \ , \\ m\dfrac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky} \ . \end{cases} \tag{46.1}$$

z' okuň daşyndan aýlanma burçunyň nähili deňlemäni kanagatlandyrýandygyny kesgitläliň. $Cx'y'z'$ koordinatalar sistemasynyň hereketi (göçürme hereket)-öňe bolan hereket. Onda jisimiň göräli̇k hereketi-Cz' okuň daşyndan aýlanma hereket.

Kinematikadan belli bolşy ýaly, tekiz-parallel hereketdäki jisimiň islendik nokadynyň tizlenmesi iki tizlenmeden ybarat:

1) Saýlanyp alnan nokadyň (garalýan mysalda C nokat) tizlenmesine deň bolan göçürme tizlenmesi;

2) Saýlanyp alnan nokatdan geçýän, gozganmaýan tekizlige perpendikulýar bolan okuň (garalýan mysalda Cz') daşyndan aýlanma tizlenmesi bolan görälik tizlenmesi;

Görälik tizlenmesi öz gezeginde iki tizlenmä bölünýär:

1) normal tizlenme;

2) galtaşma tizlenme.

Diýmek, jisimiň islendik nokady üçin

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$$

Jisimiň elementar bölejiginiň massasyny Δm bilen belgiläp, bu bölejigiň (material nokadyň) inersiýa güýjüni kesgitläliň:

$$\vec{F}^{in} = -\Delta m \cdot \left(\vec{a}_C + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau\right) = -\Delta m \cdot \vec{a}_C - \Delta m \cdot \vec{a}_r^n - \Delta m \cdot \vec{a}_r^\tau$$

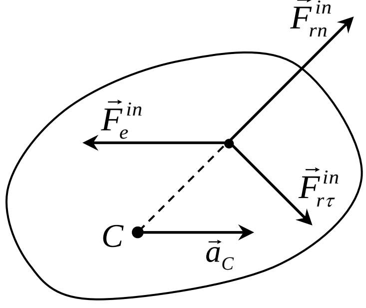
ýa-da, $\vec{F}^{in} = \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_{rn}^{in} + \vec{F}_{r\tau}^{in}$. Bu ýerde

$\vec{F}_e^{in}$ -elementar bölejigiň göçürme inersiýa güýji;

$\vec{F}_{rn}^{in}$ -elementar bölejigiň merkezden gaýdýan inersiýa güýji;

$\vec{F}_{r\tau}^{in}$ - elementar bölejigiň galtaşma inersiýa güýji.

Bu güýçleri jisimiň kese-kesiginde şekillendireliň:



46.2-nji surat

$\vec{F}_e^{in} = -\Delta m \cdot \vec{a}_C$ deňlikden jisimiň elementar bölejikleriniň göçürme inersiýa güýçleriniň özara paralleldikleri gelip çykýar. Mundan daşary, bu güýçler elementar bölejikleriň massalaryna göni proporsional. Diýmek, bu güýçler (agyrlyk güýçleri ýaly) täsir çyzygy C nokatdan geçýän deňtäsiredijä getirilýär. Deňtäsiredijiniň ululygy

$$\sum F_e^{in} = \sum \Delta m \cdot a_C = a_C \sum \Delta m = m \cdot a_C$$

bu ýerde m-jisimiň massasy.

Dalamberiň prinsipi boýunça jisime goýlan güýçler we jisimiň nokatlarynyň inersiýa güýçleri deňagramlaşýarlar. Diýmek, bu güýçleriň z' oka görä momentleriniň jemi nola deň bolmaly;

$$\sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right) + \sum m_{z'}\left(\vec{F}_e^{in}\right) + \sum m_{z'}\left(\vec{F}_{rn}^{in}\right) + \sum m_{z'}\left(\vec{F}_{r\tau}^{in}\right) = 0 \qquad (46.2)$$

Emma $\vec{F}_e^{in}$ güýçleriň C nokatdan geçýän deňtäsiredijä getirilýändigi sebäpli, Wariňýonyň teoremasyny ulanyp taparys:

$$\sum m_{z'}\left(\vec{F}_e^{in}\right) = m_{z'}\left(-m \cdot \vec{a}_C\right) = 0$$

Merkezden gaýdýan inersiýa güýçler Cz' oky kesýärler. Diýmek,

$$\sum m_{z'}\left(\vec{F}_{rn}^{in}\right) = 0 .$$

(44.2) formuladan

$$\sum m_{z'}\left(\vec{F}_{r\tau}^{in}\right) = -I_{z'} \cdot \varepsilon$$

deňligi alarys. Bu ýerde $I_{z'}$-jisimiň z' oka görä inersiýa moment, ε-jisimiň z' okuň daşyndan aýlanma (görälik hereketi) burç tizlenmesi. Şeýlelik bilen, ýokarda agzalanlary göz öňünde tutup, (46.2) deňlikden alarys:

$$\sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right) - I_{z'} \cdot \varepsilon = 0$$

ýa-da

$$I_{z'} \cdot \varepsilon = \sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right) \qquad (46.3)$$

Netijede seredilýan hereketi häsiýetlendirýan üç sany deňleme alyndy:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_{kx} , \\ m\dfrac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky} , \\ I_{z'}\, \varepsilon = \sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right). \end{cases} \qquad (46.4)$$

Alnan deňlemeler sistemasyna jisimiň **tekiz-parallel hereketiniň differensial deňlemeleri** diýilýär. Elbetde, (46.4) sistemanyň üçünji $I_{z'} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right)$ ýa-da $I_{z'} \dfrac{d\omega}{dt} = \sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right)$ görnüşde hem ýazyp bolar.

Bir hususy ýagdaýa seredip geçeliň.

Goý, $\sum m_{z'}\left(\vec{F}_k\right) = 0$ we $\omega_0 = 0$ bolsun. Onda (46.3) deňlemeden alarys:

$$I_{z'} \cdot \varepsilon = 0 ,$$

ýagny $I_{z'}\dfrac{d\omega}{dt}=0$. Bu deňlemeden $\omega=const=\omega_0=0$ deňlik gelip çykýar. Diýmek, bu ýagdaýda jisim öňe bolan hereketde bolýar.

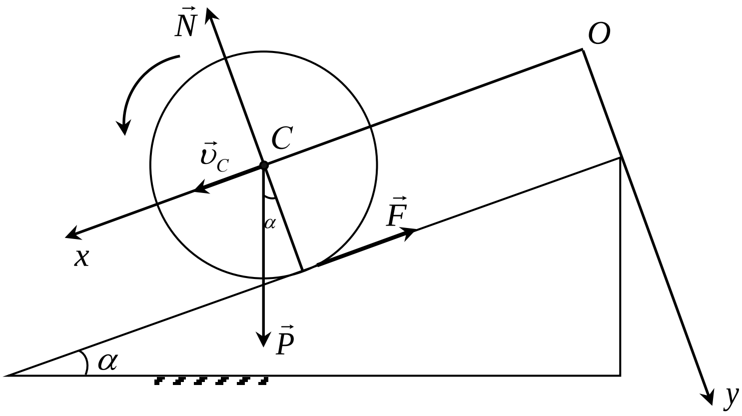
Bir mysala seredeliň.

Mysal. *m* massaly, *r* radiusly birjynsly silindr ýapgyt tekizlik boýunça agyrlyk güýjüniň täsirinde aşaklygyna typman tigirlenýär, *f*-typma sürtülme koeffisiýenti.

1) Silindriň agyrlyk merkeziniň tizlenmesini kesgitlemeli;

2) Silindriň typman hereket etmegi üçin nähili şert ýerine ýetmeli?

Çözülişi.



46.3-nji surat

Silindre täsir edýän güýçler: $\vec{P}$-agyrlyk güýji; $\vec{N}$-ýapgytlygyň reaksiýa güýji; $\vec{F}$-typma sürtülme güýji.

Koordinata oklaryny 46.3-nji suratda görkezilişi ýaly alyp, (46.4) deňlemeler sistemasyny düzeliň:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_C}{dt^2}=mg\sin\alpha-F\ , \\ m\dfrac{d^2y_C}{dt^2}=mg\cos\alpha-N\ , \\ I_C\dfrac{d\omega}{dt}=Fr\ . \end{cases}$$

Bu ýerde I_C-silindriň, onuň agyrlyk merkezinden geçýän, XOY tekizlige perpendikulýar oka görä inersiýa momenti. Hereketiň dowamynda $y_C=const$, diýmek, $\dfrac{d^2y_C}{dt^2}=0$. Onda ikinji deňlemeden alarys: $N=mg\cos\alpha$. Silindriň typman hereket edýändigi sebäpli, $\upsilon_C=\omega\cdot r$. Onda, $\dfrac{d^2x_C}{dt^2}=\dfrac{d\upsilon_C}{dt}=r\dfrac{d\omega}{dt}$. Diýmek, birinji deňleme $m\cdot r\dfrac{d\omega}{dt}=mg\sin\alpha-F$ görnüşe geler. . Bu deňlemäni *r*-e köpeldip, üçünji deňleme bilen goşup, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\left(m\cdot r^2+I_C\right)\frac{d\omega}{dt}=mgr\sin\alpha$$

Bu ýerden $I_C = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ deňligi göz öňünde tutup, $r\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$ bolýandygyny taparys. Bu ýerden silindriň agyrlyk merkeziniň tizlenmesiniň

$$a_C = \frac{d\upsilon_C}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

bolýandygyna göz ýetireris.

Deňlemeler sistemasynyň üçünji deňlemesinden sürtülme güýjüni kesgitläliň:

$$F = \frac{I_C}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{m \cdot r}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{3} mg \sin\alpha = \frac{P}{3} \sin\alpha$$

Silindriň typman hereket etmekligi üçin $F \le f \cdot N$ deňsizlik ýerine ýetmeli.

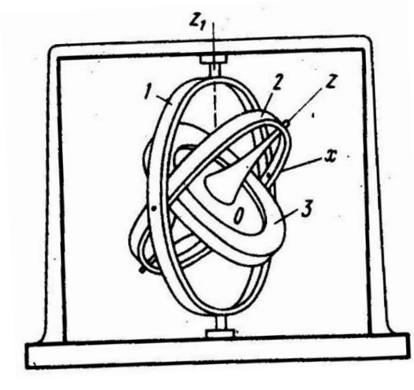
Bu deňsizlikde F, N güýçleriň ululyklaryny goýup, $\frac{P}{3} \sin\alpha \le f \cdot P \cos\alpha$ deňsizligi alarys. Bu ýerden $f \ge \frac{1}{3} tg\alpha$. Alnan deňsizlik silindriň typman tigirlenmeginiň şerti bolup durýar.

§47. Giroskop.

Gozganmaýan O nokady we Oz simmetriýa oky bolan gaty jisime seredeliň.

Jisimiň Oz okuň daşyndan aýlanmasynyň burç tizligini Ω, Oz okuň jisim bilen bilelikde O nokadyň daşyndan aýlanmasynyň (sferik hereket) burç tizligini ω bilen belgiläliň. Şeýlelikde, Ω ululyk ω ululykdan ep-esli uly bolsun, $\Omega >> \omega$. Şeýle gaty jisime **giroskop** diýilýär. Oz ok jisimiň baş merkezi inersiýa oky bolup durýar.

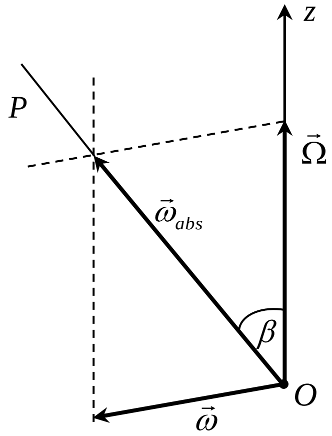
Giroskopyň mysaly wolçok bolup biler. Giroskopiki enjamlarda giroskopyň rotoryny adaty kardanly asmada (podwes) berkidýärler. Şeýle berkitme rotora gozganmaýan O (rotoryň agyrlyk merkezi) merkeziň daşyndan aýlanmaga mümkinçilik berýär. (47.1-nji surat). Bu giroskopyň erkinlik derejesi üçe deň.



47.1-nji surat

Tehnikada ulanylýan giroskoplarda Ω ululyk ω ululykdan müňlerçe esse uly. Bu ýagdaý giroskopyň elementar ýa-da presession nazaryýetini düzmäge mümkinçilik berýär. Şeýlelikde, aşakda getirilenlerden ugur alynýar.

Islendik wagt pursatynda $\vec{\omega}_{abs} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}$ we jisimiň hereketi OP pursatdaky aýlanma okunyň daşyndan aýlanma hereket bolup durýar (47.2-nji surat).



47.2-nji surat

Emma $\Omega >> \omega$ bolanda $\vec{\Omega}$ we $\vec{\omega}_{abs}$ wektorlaryň arasyndaky β burç ujypsyz bolup, $\vec{\omega}_{abs} = \vec{\Omega}$ diýip kabul edip bolar, ýagny *OP* ok islendik wagt pursatynda giroskopyň *Oz* oky bilen gabat gelýär. Onda giroskopyň $\vec{K}_0$ kinetik momenti *Oz* oky boýunça ugrukdyrylan we $K_0 = I_z \cdot \Omega$ diýip hasap edip bolar. Giroskopyň elementar nazaryýetiniň esasy taglymaty şundan ybarat. Mundan beýläk

$$\vec{K}_0 = I_z \cdot \vec{\Omega} \tag{47.1}$$

deňligi ulanarys. Bu ýerde I_z-giroskopyň *z* oka görä inersiýa momenti.

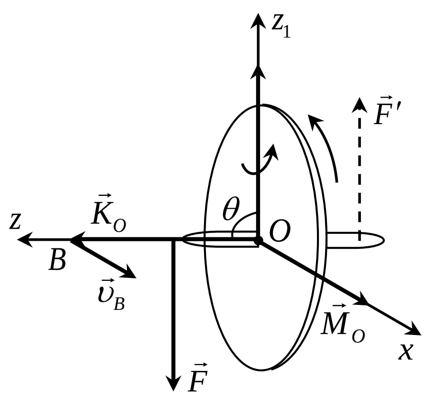
Giroskopyň esasy häsiýetlerini getireliň.

1. Erkin giroskop.

Agyrlyk merkezi gozganmaýan, simmetriýa oky agyrlyk merkeziniň daşynda erkin aýlanyp bilýän giroskopa seredeliň (47.1-nji surat). Bu giroskopa *erkin giroskop* diýilýär. Oklardaky sürtülme güýji göz öňünde tutulmasa, $\sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) = \vec{0}$ we $\vec{K}_0 = const$ bolar, ýagny $\vec{K}_0$ wektoryň ugry we ululygy üýtgemeýär. Emma $\vec{K}_0$ wektor *Oz* ok boýunça ugrukdyrylandygy sebäpli *Oz* ok giňişlikde inersial hasaplanyş sistemasyna görä ornuny üýtgetmeýär. Giroskopyň bu häsiýeti giroskopik enjamlary konstruirlemekde giňden ulanylýar. “Ýyldyz” hasaplanyş sistemasynda ugruny üýtgetmeýän giroskopyň oky ýeriň aýlanmasyna garşy aýlanýar. Şeýlelik bilen, erkin giroskop Ýer şarynyň aýlanýandygyny görkezmek üçin ulanylýar.

2. Güýjüň (jübütiň) giroskopyň okuna edýän täsiri. Giroskopyň okunyň durnuklylygy.

Goý, giroskopyň okuna (47.3-nji surat) *O* nokada görä $\vec{M}_0$ momentli $\vec{F}$ güýç ýa-da $\vec{M}_0$ momentli $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ jübüt täsir edýän bolsun.



47.3-nji surat

Onda momentler teoremasy boýunça

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0 \text{ ýa-da } \frac{d\left(\overrightarrow{OB}\right)}{dt} = \vec{M}_0 ,$$

bu ýerde, B- $\vec{K}_0$ wektoryň ujy. Bu ýerden, $\dfrac{d\left(\overrightarrow{OB}\right)}{dt} = \vec{\upsilon}_B$ deňligi göz öňünde tutup alarys:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{M}_0 \qquad \left(\vec{\upsilon}_B = \frac{d\vec{K}_0}{dt}\right) \tag{47.2}$$

(47.2) deňlik Rezalyň teoremasynyň mazmunydyr: **Jisimiň *O* nokada görä kinetik momenti bolan $\vec{K}_0$ wektoryň ujyndaky nokadynyň tizligi ugry we ululygy boýunça daşky güýçleriň baş momentine deň.**

Anri Rezal (1828-1896)
Meşhur fransuz alymy. Kinematikadan ilkinji kitabyň awtory.

Görşümiz ýaly, eger çalt hereketlenýän giroskopyň okuna güýç täsir etse, giroskopyň oky güýjüň ugruna däl-de, $\vec{M}_0$ wektoryň ugruna tarap, ýagny güýje perpendikulýar tarapa aýlanýar. Giroskopyň okuna jübüt täsir edende hem şeýle ýagdaý ýüze çykýar.

(47.2) formuladan görnüşi ýaly, güýjün täsiri bes edilende, ýagny $\vec{M}_0 = \vec{0}$ bolanda $\vec{\upsilon}_B = \vec{0}$ bolup, giroskopyň oky öz aýlanmasyny bes edýär. Eger täsir edýän güýjüň täsiri gysga wagtlaýyn (itergi) bolsa, onda giroskopyň oky öz ugruny üýtgetmeýär. Bu häsiýet çalt aýlanýan giroskopyň okunyň durnuklylygyny aňladýar.

3. Giroskopyň presessiýasy.

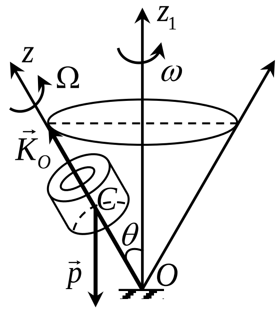
Goý, hereketiň dowamynda täsir edýän $\vec{F}$ güýç (ýa-da jübüt) ZOZ_1 tekizlikde (47.3-nji surat) ýerleşýän bolsun (meselem, agyrlyk güýji). Ýokarda görkezilişi ýaly, Oz ok güýjüň täsir ugry boýunça gyşarmaýar, diýmek, $\theta = Z_1\hat{O}Z$ burç hemişelik, $\vec{\upsilon}_B$ wektor bolsa ZOZ_1 tekizlige perpendikulýar. Giroskop Z_1 okuň daşyndan käbir $\vec{\omega}$ burç tizlikli aýlanýar (presessirleýär), $\vec{\omega}$ ululyga *presessiýa burç tizligi* diýilýär. $\vec{\omega}$ ululygy kesgitleýän deňlemäni tapalyň. OZ okuň OZ_1 okuň daşyndan $\vec{\omega}$ burç tizlikli aýlanýandygy sebäpli, $\vec{\upsilon}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$ ýa-da, $\vec{\upsilon}_B = \vec{\omega} \times \vec{K}_0$. Onda (47.2) formuladan alarys:

$$\vec{\omega} \times \vec{K}_0 = \vec{M}_0 \tag{47.3}$$

Alnan deňleme giroskopyň elementar nazaryýetiniň başlangyç ýakynlaşma deňlemesidir. Bu deňlemeden $\omega \cdot K_0 \sin\theta = M_0$ deňligi göz öňünde tutup,

$$\omega = \frac{M_0}{K_0 \sin\theta} = \frac{M_0}{I_z \cdot \Omega \cdot \sin\theta} \qquad (47.4)$$

deňligi alarys. $I_z \cdot \Omega$ ululyk ulaldygyça ω kiçelýär. ω kiçeldigiçe giroskopyň elementar (presession) nazaryýetiniň takyklygy artýar. Mysal hökmünde $\vec{P}$ agyrlyk güýjüniň täsirindäki wolçogyň (47.4-nji surat) presessiýa burç tizligini kesgitläliň.



47.4-nji surat

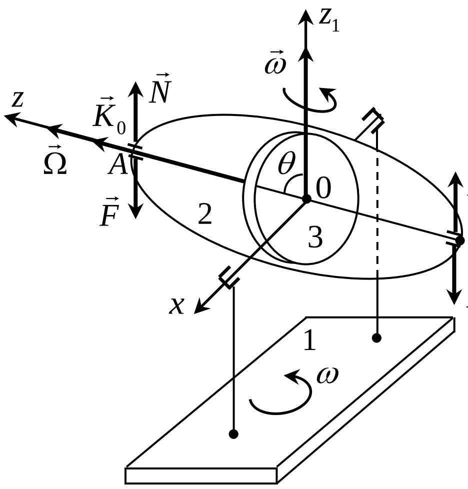
$OC = a$ (C–wolçogyň agyrlyk merkezi) belgilemäni girizip, $M_0 = P \cdot a \cdot \sin\theta$ (P–-wolçogyň agramy) deňligi ulanyp, (47.4) deňlikden alarys:

$$\omega = \frac{P \cdot a}{K_0} = \frac{P \cdot a}{I_z \cdot \Omega} \qquad (47.4^*)$$

Şuňa meňzeş presessiýany Ýer şarynyň oky hem amala aşyrýar. Ýeriň formasynyň takyk şar däldigi we okunyň gyşarmasynyň bardygy sebäpli, Günüň we Aýyň dartyş güýçleriniň deňtäsiredijisi Ýeriň massalar merkezinden geçmeýär we bu merkeze görä moment döredýär. Ýer şarynyň okunyň presessiýasy (bir aýlanmaýň wagty) takmynan 26000 ýyl.

4. Erkinlik derejesi iki bolan giroskop. Giroskopiki effekt.

47.5-nji suratda görkezilen 1 belgili esasa görä Ox okuň daşyndan aýlanyp bilýan 2 belgili halka berkidilen 3 belgili rotorly giroskopa seredeliň.



47.5-nji surat

Şeýle giroskopyň erkinlik derejesi 2-ä deň (Oz okuň daşyndan hem 2 halka bilen bilelikde Ox okuň daşyndan aýlanýar). Bu giroskopyň häsiýetleri ýokarda seredilen üç derejeli (erkinlik derejesi 3) giroskopyň häsiýetlerinden düýpgöter tapawutly.

Meselem, 2 halkany itekleseň halka rotor bilen bilelikde *Ox* okuň daşyndan erkin aýlanýar, emma üç derejeli giroskopa bu iteklemäniň täsiri ýok.

Goý, käbir wagt pursatynda 1 esas OZ_1 okuň daşynda ω burç tizlikli aýlanyp başlaýan bolsun. Şeýlelikde, $\omega << \Omega$. Onda giroskop esas bilen bilelikde aýlanyp, OZ_1 okuň daşyndan mejbury presessiýany amala aşyrýar. Şeýlelikde, (47.3) formulanyň esasynda 3 rotora

$$\vec{M}_0 = \vec{\omega} \times \vec{K}_0$$

moment täsir edýär. Elbetde, bu momenti diňe A, A' podşipnikleriň rotoryň okuna täsiri bolan $\vec{F}, \vec{F}'$ güýçler döredip biler. 3 belgili rotoryň massalar merkeziniň (O) gozganmaýandygy sebäpli, massalar merkeziniň hereketi hakyndaky teoremadan

$$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$$

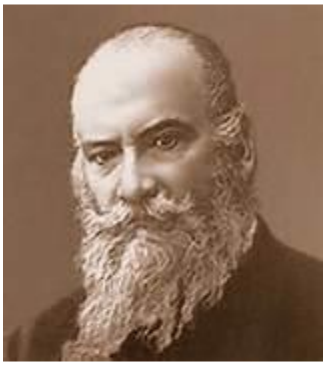
deňlik alynýar, ýagny $\vec{F}, \vec{F}'$ güýçler jübüti emele getirýärler.

Podşipnikler rotoryň okuna $\vec{F}, \vec{F}'$ güýçler bilen täsir edende dinamikanyň üçünji kanuny boýunça ok hem podşipniklere ululyklary boýunça *F*-e deň, ugurlary boýunça garşylykly $\vec{N}, \vec{N}'$ güýçler bilen täsir etmeli. $(\vec{N}, \vec{N}')$ jübüte *giroskopiki jübüt* diýilýär. Bu jübütiň $\vec{M}_{gir}$ momentine *giroskopiki moment* diýilýär. $\vec{M}_{gir}$ moment $\vec{M}_0$ momente garşylyklydygy sebäpli taparys:

$$\vec{M}_{gir} = \vec{\omega} \times \vec{K}_0\ ,\ M_{gir} = K_0 \cdot \omega \cdot \sin\theta = I_z \cdot \Omega \cdot \omega \cdot \sin\theta \qquad (47.5)$$

Bu ýerden N.Ýe.Žukowskiniň düzgünini alarys:

Eger çalt hereketlenýän giroskopa mejbury presessiýa hereketi berilse, rotoryň okunyň oturdylan podşipniklerine $\vec{M}_{gir}$ momentli giroskopiki jübüt täsir edip başlar. Bu jübüt rotoryň okuny presessiýa okuna parallel etmäge, ýagny $\vec{\Omega}$ we $\vec{\omega}$ wektorlaryň ugurlaryny gabat getirmäge çalyşýar.



N.Ýe.Žukowskiý (1847-1921)
Beýik rus alymy. Gidrodinamikany we aerodinamikany esaslandyryjy. Ylmy işleri gaty jisimiň mehanikasy, astronomiýa, matematika, gidrodinamika, gidrawlika, amaly mehanika ýaly ylmy ugurlar bilen bagly.

Giroskopiki jübütiň täsirinde 2 belgili halka rotor bilen bilelikde *Ox* okuň daşyndan aýlanmaga başlaýar. Şeýlelikde, θ burç we M_{gir} moment kemelýär. $\theta = 0$ bolan pursatda halka aýlanmasyny bes edýär. Eger 2 belgili halka *Ox* okuň daşyndan aýlanyp bilmez ýaly 2 halka 1 esasa berkidilse, giroskopyň bir erkinlik derejesi galar (*OZ* okuň daşyndan aýlanma). Ýöne bu ýagdaýda-da 1 belgili esas OZ_1 okuň daşyndan aýlansa, giroskopiki effekt ýüze çykýar, ýagny ok podşipniklere $\vec{N}, \vec{N}'$ güýçler bilen täsir eder. Bu güýçleriň ululygyny (ikisi deň) A, A' aralyk belli bolanda, (47.5) formuladan tapyp bolar.

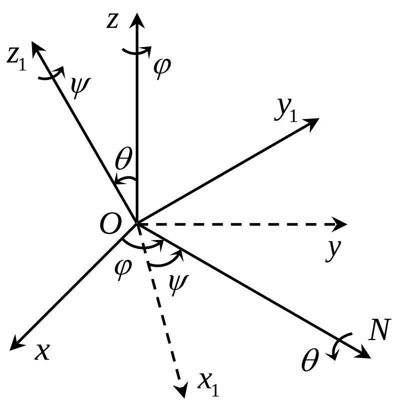
§48. Gaty jisimiň gozganmaýan nokadyň daşyndaky hereketiniň differensial deňlemesi.

1. **Eýleriň kinematiki deňlemeleri.**
2. **Gozganmaýan nokadyň daşynda hereketlenýän gaty jisimiň kinetik momenti.**
3. **Gozganmaýan nokadyň daşynda hereketlenýän gaty jisimiň kinetik energiýasy.**
4. **Eýleriň dinamiki deňlemeleri.**

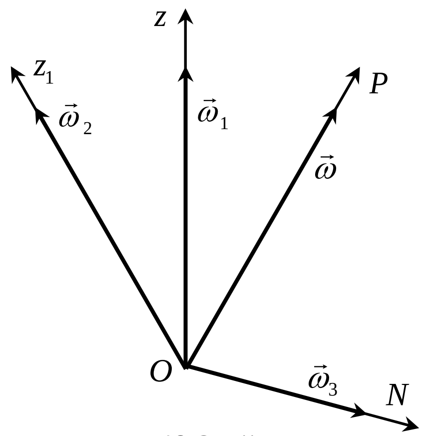
Bu paragrafda sferik hereketdäki (gozganmaýan nokadyň daşyndaky hereket) gaty jisime degişli käbir maglumatlar bilen tanyşalyň.

48.1. Eýleriň kinematiki deňlemeleri.

Mälim bolşy ýaly, sferik hereketdäki jisimiň giňişlikde ýerleşişi **Eýleriň burçlary** diýlip atlandyrylýan φ, ψ, θ burçlar bilen kesgitlenýär. Şeýle-de, islendik wagt pursatynda gozganmaýan nokatdan geçýän pursatdaky aýlanma oky tapylyp, jisim şu pursatda bu okuň daşyndan aýlanýar. $\vec{\omega}$ burç tizligi pursatdaky aýlanma oky boýunça ugrukdyrylan.



48.1-nji surat



48.2-nji surat

O-gozganmaýan nokat, $Oxyz$-gozganmaýan koordinatalar sistemasy, $Ox_1y_1z_1$-jisim bilen bagly hereketlenýan koordinatalar sistemasy, OP-pursatdaky aýlanma oky, ON-düwünler oky.

$\vec{\omega}$ burç tizliginiň wektorynyň $Ox_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasy boýunça düzüjilerini kesgitläliň. Elbetde, $\vec{\omega}$ wektory

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \qquad (48.1)$$

görnüşde ýazyp bolar. Bu ýerde $\vec{\omega}_1$-jisimiň Oz okuň daşyndan aýlanma burç tizligi,

$\vec{\omega}_2$-jisimiň Oz_1 okuň daşyndan aýlanma (presessiýa) burç tizligi, $\vec{\omega}_3$-jisimiň düwünler okunyň daşyndan aýlanma (nutasiýa) burç tizligi.
Ululyklary boýunça

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \ , \ \omega_2 = \dot{\psi} \ , \ \omega_3 = \dot{\theta} \tag{48.2}$$

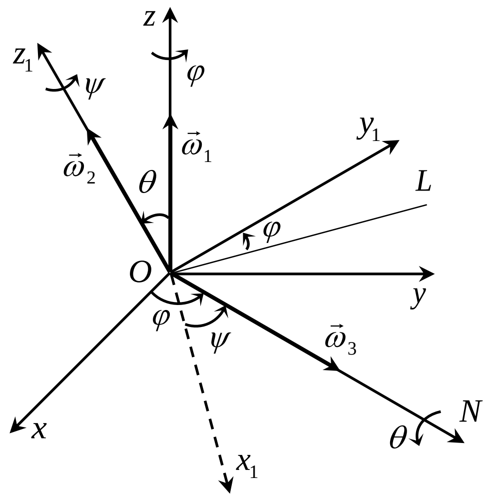
(48.1) deňligi *x,y,z* oklaryna mproýektirläp taparys:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \omega_{1x_1} + \omega_{2x_1} + \omega_{3x_1} \ , \\ \omega_{y_1} &= \omega_{1y_1} + \omega_{2y_1} + \omega_{3y_1} \ , \\ \omega_{z_1} &= \omega_{1z_1} + \omega_{2z_1} + \omega_{3z_1} \ . \end{aligned} \tag{48.3}$$

$\vec{\omega}_2$ we $\vec{\omega}_3$ wektorlaryň proýeksiýalaryny ýeňillik bilen kesgitläris (48.3-nji surat):

$$\omega_{2x_1} = \omega_{2y_1} = 0 \quad , \quad \omega_{2z_1} = \dot{\psi} \ ,$$

$$\omega_{3x_1} = \dot{\theta}\cos\psi \quad , \quad \omega_{3y_1} = \dot{\theta}\sin\psi \quad , \quad \omega_{3z_1} = 0 \ .$$



48.3-nji surat

$\vec{\omega}_1$ wektoryň düzüjilerini kesgitlemek üçin Oz_1 we Oz oklaryň üstünden tekizlik geçireliň. *OL*–geçirilen tekizlik bilen Ox_1y_1 tekizligiň kesişmesi bolan göni çyzyk. *ON* düwünler çyzygynyň zOz_1 tekizlige perpendikulýardygy sebäpli bu çyzyk *OL* göni çyzyga hem perpendikulýar $\left(N\hat{O}L = 90^0 \, , L\hat{O}y_1 = \varphi \right)$. $\vec{\omega}_2$ wektory *OL* göni çyzyga proýektirläp, soň alnan proýeksiýany Ox_1, Oy_1 oklara proýektirläp taparys:

$$\omega_{1x_1} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \ , \ \omega_{1y_1} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \ , \ \omega_{1z_1} = \dot{\varphi}\cos\theta$$

Alnan deňlikleri (48.3) deňlemäniň sag böleginde goýup taparys:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\psi \ , \\ \omega_{y_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\psi \ , \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \ . \end{aligned} \tag{48.4}$$

(48.4) deňlemelere **Eýleriň kinematiki** deňlemeleri diýilýär. Bu deňlemeler $\vec{\omega}$ wektoryň hereketlenýän $Ox_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynyň oklary boýunça düzüjilerini kesgitleýär. Şuňa meňzeşlikde $\vec{\omega}$ wektoryň gozganmaýan *Oxyz* koordinatalar sistemasynyň oklary boýunça düzüjilerini hem kesgitläp bolýar:

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi ,$$
$$\omega_y = -\dot\psi \sin\theta \cos\psi + \dot\theta \sin\varphi , \qquad (48.5)$$
$$\omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi .$$
(48.5) deňlemeleri ulanyp, $\vec\varepsilon$ (burç tizlenme) wektory hem kesgitläp bolýar.
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dot\omega_x , \\ \varepsilon_y = \dot\omega_y , \\ \varepsilon_z = \dot\omega_z . \end{cases} \qquad (48.6)$$

48.2. Gozganmaýan nokadyň daşynda hereketlenýän gaty jisimiň kinetik momenti.

Gozganmaýan O nokadyň daşynda aýlanýan jisime seredeliň. $\vec K_0$ wektory kesgitlemek üçin bu wektoryň dekart Ox, Oy, Oz koordinata oklaryna bolan proýeksiýalaryny bilmeli. Degişli formulalary ýönekeýleşdirilen görnüşde almak üçin $Oxyz$ koordinatalar sistemasynyň oklary hökmünde jisim bilen bagly, jisimiň O nokadyndaky baş inersiýa oklaryny alalyň. (x_k, y_k, z_k)-jisimiň nokady, $\vec\upsilon_k$-bu nokadyň tizligi.

6-njy paragrafyň (6.8) formulasyndan alarys:
$$m_x(m_k\vec\upsilon_k) = m_k(y_k\upsilon_{kz} - z_k\upsilon_{ky})$$
Emma (21.6) formuladan mälim bolşy ýaly,
$$\upsilon_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k , \ \upsilon_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k .$$
Bu ýerde, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$-jisimiň pursatdaky burç tizliginiň Ox,Oy,Oz oklara proýeksiýalary. $\upsilon_{ky}, \upsilon_{kz}$ ululyklary ýokardaky deňlikde ýerine goýup (koordinatalaryň köpeltmek hasyllary bar bolan goşulyjylar hasaba alynmaýar. Sebäbi Ox,Oy,Oz–baş inersiýa oklary bolup durýar, ýagny $\sum m_k x_k y_k , \sum m_k x_k z_k$ merkezden gaýdýan inersiýa momentler nola deň) alarys:
$$K_x = \sum m_x(m_k\vec\upsilon_k) = \left[\sum m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right)\right]\omega_x$$
ýa-da
$$K_x = I_x \cdot \omega_x ,$$
bu ýerde I_x–jisimiň Ox oka görä inersiýa momenti.

Ýokardaka meňzeşlikde K_y, K_z ululyklary hem hasaplap taparys:
$$K_x = I_x \cdot \omega_x , \ K_y = I_y \cdot \omega_y , \ K_z = I_z \cdot \omega_z \qquad (48.7)$$
(48.7) formula jisimiň O nokada görä kinetik momentiniň O nokatdaky baş inersiýa oklar boýunça düzüjilerini görkezýär. Eger Ox,Oy,Oz oklar baş inersiýa oklary bolmasa, onda
$$\begin{cases} K_x = I_x \cdot \omega_x - I_{xy} \cdot \omega_y - I_{xz} \cdot \omega_z , \\ K_y = I_y \cdot \omega_y - I_{yz} \cdot \omega_z - I_{yx} \cdot \omega_x , \\ K_z = I_z \cdot \omega_z - I_{zx} \cdot \omega_x - I_{zy} \cdot \omega_y \end{cases} \qquad (48.8)$$
deňlikler alnar.

48.3. Gozganmaýan nokadyň daşynda hereketlenýän gaty jisimiň kinetik energiýasy.

Mälim bolşy ýaly, gozganmaýan nokadyň daşynda hereketlenýän gaty jisim islendik wagt pursatynda gozganmaýan nokatdan geçýän aýlanma okunyň daşyndan aýlanýar. Onda jisimiň kinetik energiýasy

$$T = I_l \frac{\omega^2}{2} . \qquad (48.9)$$

Bu ýerde ω-jisimiň burç tizligi, l-pursatdaky aýlanma oky, I_l–jisimiň pursatdaky aýlanma oka görä inersiýa momenti.

I_l ululygy 35-nji paragrafyň (35.25) formulasyndan alyp, (35.12-nji surata seret), şeýle-de,

$$\omega \cdot \cos\alpha = \omega_x \;,\; \omega \cdot \cos\beta = \omega_y \;,\; \omega \cdot \cos\gamma = \omega_z$$

deňlikleri göz öňünde tutup, (48.9) formuladan taparys:

$$2T = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_x\omega_z \qquad (48.10)$$

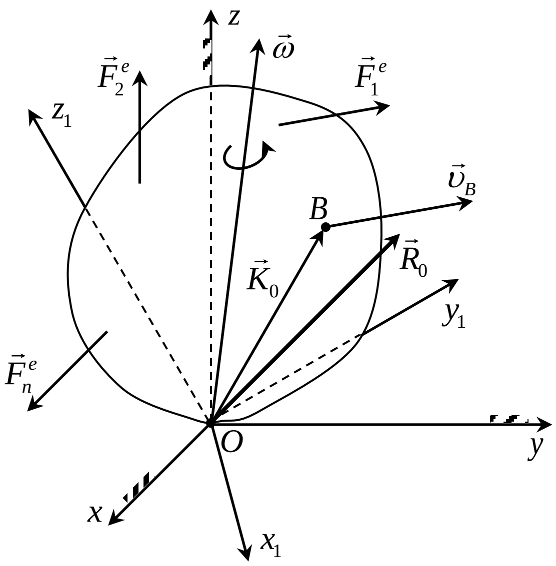
Eger koordinata oklary hökmünde jisimiň O nokadyndaky baş inersiýa oklaryny alsak,

$$2T = I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 \qquad (48.11)$$

deňlige geleris.

48.4. Eýleriň dinamiki deňlemeleri.

Goý, gozganmaýan O nokady bolan jisime $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, ..., \vec{F}_n^e$ daşky güýçler täsir edýän bolsun. Şol bir wagtda jisime $\vec{R}_0$ reaksiýa (O nokatda goýlan) güýji hem täsir edýär.



48.4-nji surat

Hereket deňlemesinden näbelli $\vec{R}_0$ güýji aýyrmak üçin (39.4) formulany O nokada görä ulanalyň. Rezalyň teoremasyndan (§41) alarys:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{M}_0 \quad \left(\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{\upsilon}_B \right), \qquad (48.12)$$

bu ýerde $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right)$-daşky güýçleriň O nokada görä baş moment, $\vec{\upsilon}_B$-B nokadyň ($\vec{K}_0$ wektoryň ujy) inersial $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä tizligi.

Jisimiň hereketi hem $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä öwrenilýär. (48.12) deňligi jisim bilen bagly O nokatda jisimiň baş inersiýa oklary bolan Ox_1, Oy_1, Oz_1 oklara proýektirläliň. Bu oklaryň jisimiň O nokatdaky baş inersiýa oklarydygy sebäpli $K_{x_1}, K_{y_1}, K_{z_1}$ kinetik momentler (48.7) formulalar bilen kesgitlener.

$\vec{\upsilon}_B$ tizligiň hereketlenýän koordinata oklary boýunça düzüjierini kesgitlemek üçin

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_B^r + \vec{\upsilon}_B^e \tag{48.13}$$

deňlikden peýdalanalalyň. Bu ýerde $\vec{\upsilon}_B^r$-B nokadyň $Ox_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä, $\vec{\upsilon}_B^e$-B nokadyň $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä tizligi. (47.2) deňlikden alarys:

$$\upsilon_{Bx_1}^r + \upsilon_{Bx_1}^e = M_{x_1} \tag{48.14}$$

B nokadyň koordinatalaryny x_1, y_1, z_1 belgiläliň. B nokadyň radius-wektory $\vec{K}_0$ wektordygy sebäpli,

$$K_{x_1} = x_1 \ , \ K_{y_1} = y_1 \ , \ K_{z_1} = z_1$$

Bu ýerden

$$\begin{cases} \upsilon_{Bx_1}^r = \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{dK_{x_1}}{dt} \ , \\ \upsilon_{By_1}^r = \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{dK_{y_1}}{dt} \ , \\ \upsilon_{Bz_1}^r = \dfrac{dz_1}{dt} = \dfrac{dK_{z_1}}{dt} \end{cases}$$

deňlikleri alarys.

$$\vec{\upsilon}_B^e = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$$

formuladan

$$\upsilon_{Bx_1}^e = \omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1 = \omega_{y_1} \cdot K_{z_1} - \omega_{z_1} \cdot K_{y_1} \ ,$$

$$\upsilon_{By_1}^e = \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1 = \omega_{z_1} \cdot K_{x_1} - \omega_{x_1} \cdot K_{z_1} \ ,$$

$$\upsilon_{Bz_1}^e = \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1 = \omega_{x_1} \cdot K_{y_1} - \omega_{y_1} \cdot K_{x_1}$$

deňlikleri taparys.

Ýokarda getirilenleri $\left(\upsilon_{Bx_1}^r, \upsilon_{By_1}^r, \upsilon_{Bz_1}^r, \upsilon_{Bx_1}^e, \upsilon_{By_1}^e, \upsilon_{Bz_1}^e\right)$ şeýle-de, (48.7) formuladan $K_{x_1}, K_{y_1}, K_{z_1}$ ululyklaryň aňlatmalaryny (48.14) formula goýup taparys:

$$\begin{cases} I_{x_1}\dfrac{d\omega_{x_1}}{dt}+\left(I_{z_1}-I_{y_1}\right)\omega_{y_1}\omega_{z_1}=M_{x_1}\ , \\ I_{x_1}\dfrac{d\omega_{y_1}}{dt}+\left(I_{x_1}-I_{z_1}\right)\omega_{x_1}\omega_{z_1}=M_{y_1}\ , \\ I_{z_1}\dfrac{d\omega_{z_1}}{dt}+\left(I_{y_1}-I_{x_1}\right)\omega_{x_1}\omega_{y_1}=M_{z_1}\ . \end{cases} \tag{48.15}$$

(48.15) deňlemelere *Eýleriň dinamiki deňlemeleri* diýilýär. Bu deňlemeler jisimiň gozganmaýan nokadyň daşyndaky hereketiniň jisimiň gozganmaýan nokatdaky baş inersiýa oklaryna görä differensial deňlemeleridir.

Eger jisimiň hereketi Eýleriň φ,ψ,θ burçlary bilen kesgitlenýän bolsa, onda dinamikanyň esasy meselesi, $M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1}$ ululyklar belli bolup, φ,ψ,θ parametrleri wagt funksiýasy hökmünde kesgitlemekden ybarat bolar. Bu meseläni çözmek üçin (48.15) deňlemelere Eýleriň (48.4) kinematiki deňlemelerini goşmaly. Şeýlelikde, Eýleriň kinematiki we dinamiki deňlemeleri çyzykly däl alty sany birinji tertipli deňlemelerden ybarat bolan sistemany düzýär. Bu deňlemeler sistemasyny integrirlemek üçin matematikanyň ýakynlaşma usullary ulanylýar.