2-nji BÖLÜM

KINEMATIKA

Kinematika–bu bölümde hereketi döredýän sebäpler göz öňünde tutulmazdan mehaniki hereket geometrik nukdaý nazaryndan öwrenilýär.
Kinematikada seredilýän esasy mesele:

Nokatlaryň we jisimleriň hereketlerini saýlanyp alnan koordinatalar sistemasyna görä öwrenmek we olaryň kinematiki häsiýetlendirijilerini kesgitlemek.

6-njy BAP
Nokadyň kinematikasy.
§15. Nokadyň hereketiniň berliş usullary. Nokadyň tizligi.

1. **Nokadyň hereketiniň berliş usullary.**
2. **Hereketi wektorlaýyn usul bilen berlende nokadyň tizligi.**
3. **Hereketi koordinatalaýyn usul bilen berlende nokadyň tizligi.**
4. **Hereketi tebigy usul bilen berlende nokadyň tizligi.**

15.1. Nokadyň hereketiniň berliş usullary.

Nokadyň hereketini kesgitlemeklik diýlip, islendik wagt pursatynda şertli gozganmaýan jisim bilen bagly koordinatalar sistemasyna görä nokadyň koordinatalaryny kesgitläp bilmeklige düşünilýär. Şeýlelikde, gozganmaýan jisim bilen bagly koordinatalar sistemasyna **hasaplanyş sistemasy** diýilýär.

Nokadyň giňişlikdäki ornunyň wagta baglylygyny kesgitleýän kanuna **nokadyň hereket kanuny** diýilýär.

Nokadyň hereketini bermeklik üçin ulanylýan usul nokadyň hereketiniň aýratynlygyna bagly.

Nokadyň hereketi esasy üç usul bilen berilýär: *wektorlaýyn, koordinatalaýyn, tebigy usullar*.

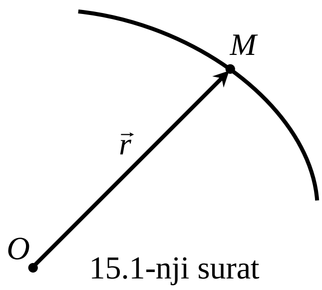
Nokadyň giňişlikde çyzýan çyzygyna **nokadyň traýektoriýasy** diýilýar.

Nokadyň hereketiniň berliş usullary bilen tanyşalyň.

Wektorlaýyn usul.

Nokat giňişlikde gozganmaýan nokatdan geçirilen radius-wektor bilen kesgitlenýär.

Nokadyň hereket edýändigi sebäpli onuň radius-wektory wagta bagly üýtgeýär, ýagny $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Bu deňlemä nokadyň hereket deňlemesi diýilýär.

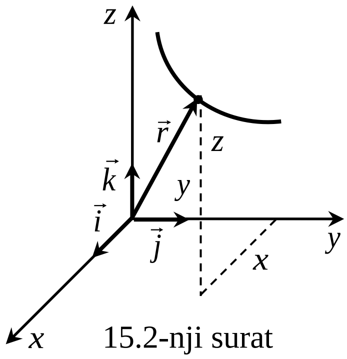


15.1-nji surat

O-gozganmaýan nokat; $\vec{r}$ -nokadyň radius wektory.

Koordinatalaýyn usul.

Nokadyň hereketi koordinatalaýyn usul bilen berlende, hereketiň aýratynlygyna laýyklykda nokadyň dekart, silindrik ýa-da sferik koordinatalary ulanylýar. Egriçyzykly koordinatalarda nokadyň tizligi, tizlenmesi öwrenilende nokadyň silindrik we sferik koordinatalary bilen tanyşarys. Häzirlikçe diňe dekart koordinatalarynyň üstünde durup geçeliň.



15.2-nji surat

Nokadyň hereket edýändigi sebäpli nokadyň dekart koordinatalary wagta baglylykda üýtgeýärler:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Bu deňlemeler nokadyň hereket deňlemeleri bolup durýarlar.

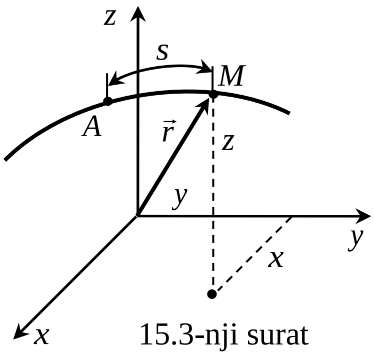
Nokadyň radius-wektorynyň nokadyň dekart koordinatalary bilen baglanyşygy:

$$\vec{r} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

deňlik bilen berilýär.

Tebigy usul.

Bu usul nokadyň traýektoriýasy belli bolanda ulanylýar. Traýektoriýada nokat (A) saýlanyp alynýar we hasaplanyş sistemasynyň başlangyç nokady hökmünde kabul edilýär. Hereket edýän M nokadyň şu pursatda traýektoriýada orny s duga koordinatasy bilen kesgitlenýär.



15.3-nji surat

Nokadyň hereket edýändigi sebäpli s duga koordinata wagta bagly üýtgeýär. Ýagny nokadyň hereket deňlemesi $s = s(t)$ görnüşlidir.

Duga koordinatasy bilen dekart koordinatalarynyň arasyndaky baglanyşygy ýazalyň:

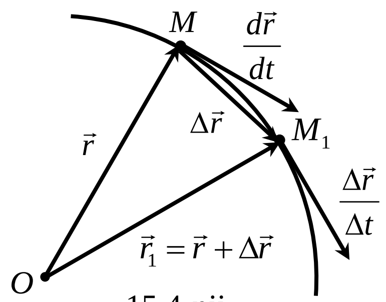
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, d\tau$$

15.2. Hereketi wektorlaýyn usul bilen berlende nokadyň tizligi.

Hereketi wektorlaýyn usul bilen berlen nokada seredeliň:



15.4-nji surat

$\vec{r}$ - t wagt pursatynda nokadyň radius-wektory;
$\vec{r}_1$- $t_1 = t + \Delta t$ wagt pursatynda nokadyň radius-wektory;
$\Delta\vec{r}$ -radius-wektoryň Δt wagtyň dowamynda artdyrmasy.
Nokadyň Δt wagtyň dowamynda ortaça tizligi diýlip,

$$\vec{\upsilon}_{orta} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{15.1}$$

ululyga düşünilýär.

Bu gatnaşygyň predeli $(\Delta t \to 0)$ nokadyň pursatdaky tizligini kesgitleýär:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ , \tag{15.2}$$

bu ýerden

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{15.3}$$

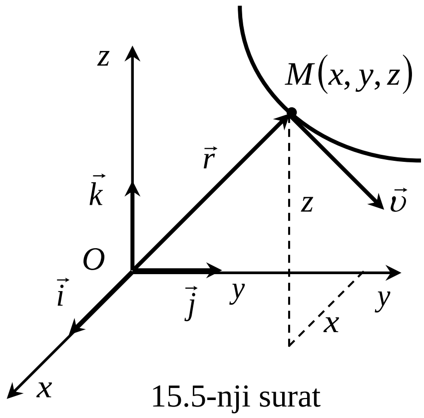
Nokadyň tizligi wektor ululyk bolup, radius-wektoryň wagt boýunça önümine deň.

$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ wektor $\Delta\vec{r}$ wektor bilen ugurdaş. Predelde, ýagny Δt nola ymtylanda M_1 nokat M nokada çäksiz ýakynlaşýar. Netijede bu nokatlary birikdirýän $\Delta\vec{r}$ wektor traýektoriýa M nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan bolup durýar. Elbetde, bu wektor bilen bir hatarda $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ wektor hem predelde galtaşýan göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan bolup durýar. Diýmek, nokadyň tizligi *traýektoriýanyň galtaşmasy boýunça ugrukdyrylan wektor*.

15.3. Hereketi koordinatalaýyn usul bilen berlende nokadyň tizligi.

Goý, nokadyň hereketi koordinatalaýyn usul bilen berlen bolsun:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



15.5-nji surat

$$\vec{r} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

(15.3) formuladan taparys $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}$. Bu ýerden tizligiň koordinata oklary boýunça düzüjilerini υ_x, υ_y, υ_z bilen belgiläp,

$$\begin{cases} \vec{\upsilon} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,\vec{t}} = \upsilon_x\cdot\vec{i} + \upsilon_y\cdot\vec{j} + \upsilon_z\cdot\vec{k} \\ \upsilon_x = \dot{x} \quad , \quad \upsilon_y = \dot{y} \quad , \quad \upsilon_z = \dot{z} \\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \end{cases} \tag{15.4}$$

deňlikleri alarys. Tizligiň ugrukdyryjy kosinuslary

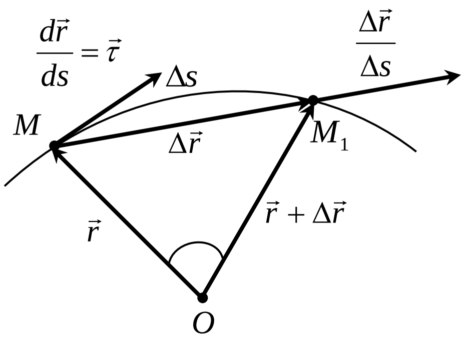
$$\cos\left(\vec{\upsilon}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \ \cos\left(\vec{\upsilon}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \ \cos\left(\vec{\upsilon}\,\hat{,}\,\vec{k}\right) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon} \tag{15.5}$$

deňlikler bilen tapylýar.

15.4. Hereketi tebigy usul bilen berlende nokadyň tizligi.

Goý, nokadyň hereketi tebigy usul bilen berlen bolsun.

Nokadyň hereket deňlemesi $s = s(t)$.



15.6-njy surat

M–nokadyň t wagt pursatyndaky orny; M_1–nokadyň t_1 wagt pursatyndaky orny. Üýtgeýän ululyk hökmünde duga koordinatasyny kabul edeliň. Onda, $\vec{r}(t) = \vec{r}(s) = \vec{r}[s(t)]$. Nokadyň tizligi $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dfrac{d\,\vec{r}}{ds} \cdot \dfrac{ds}{d\,t} = \dfrac{d\,\vec{r}}{ds} \cdot \dot{s}$.

$\dfrac{d\,\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ şertli belgileme girizeliň.

Differensial geometriýadan belli bolşy ýaly, $\vec{\tau}$–galtaşma boýunça duga koordinatasynyň artýan tarapyna ugrukdyrylan birlik wektor, $|\vec{\tau}| = 1$. Onda nokadyň tizligi

$$\vec{\upsilon} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} \tag{15.6}$$

Şeýlelikde, nokadyň tizligi traýektoriýa galtaşma boýunça ugrukdyrylyp, ululygy duga koordinatasynyň önümine deň.

Bellik. $\dot{s} < 0$ bolsa, nokadyň tizligi şu pursatda duga koordinatasynyň kemelýän tarapyna ugrukdyrylan. $\dot{s} > 0$ bolsa, nokadyň tizligi şu pursatda duga koordinatasynyň artýan tarapyna ugrukdyrylan.

Bellik. Kesgitlenişine laýyklykda tizligiň ölçeg birligi $\dfrac{m}{sek} \left(\dfrac{yol}{wagt}\right)$.

§16. Nokadyň tizlenmesi.

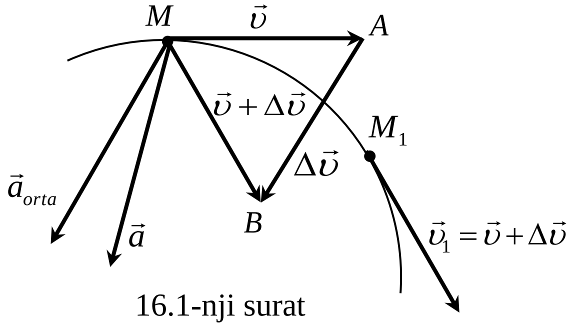
1. **Hereketi wektorlaýyn usulda berlende nokadyň tizlenmesi.**
2. **Hereketi koordinatalaýyn usulda berlende nokadyň tizlenmesi.**
3. **Tebigy üçgranlyk. Tebigy koordinata oklary.**
4. **Nokadyň tizlenmesiniň tebigy koordinata oklary boýunça düzüjileri.**
5. **Nokadyň hereketiniň hususy halatlary.**

16.1. Hereketi wektorlaýyn usulda berlende nokadyň tizlenmesi.

Nokadyň tizlenmesi düşünjesiniň üstünde durup geçeliň.

Tizlenme–nokadyň tizliginiň üýtgemegini häsiýetlendirýän fiziki ululyk.

Hereketlenýän nokada seredeliň.



16.1-nji surat

$\vec{\upsilon}$ – t wagt pursatynda nokadyň tizligi;

$\vec{\upsilon}_1$–$t + \Delta t$ wagt pursatynda nokadyň tizligi $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}$

$\Delta\vec{\upsilon}$–nokadyň tizliginiň Δt wagtyň dowamyndaky artdyrmasy.

$\vec{\upsilon}_1$–wektory M nokada parallel göçüreliň we $\Delta\vec{\upsilon}$ wektory şekillendireliň.

Kesgitleme. Tizligiň Δt wagtyň dowamyndaky $\Delta\vec{\upsilon}$ artdyrmasynyň Δt wagta gatnaşygyna nokadyň Δt wagtdaky ortaça tizlenmesi diýilýar:

$$\vec{a}_{orta} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

Ortaça tizlenmäniň predeli $(\Delta t \to 0)$ nokadyň pursatdaky tizlenmesini berýär:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (16.1)$$

Tizligiň radius-wektoryň önümine deňligi sebäpli alarys:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (16.2)$$

Diýmek, nokadyň pursatdaky tizlenmesi wektor ululyk bolup, nokadyň tizliginiň önümine ýa-da radius-wektorynyň ikinji önümine deňdir:

$$\begin{cases} \vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} \\ \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \end{cases} \qquad (16.3)$$

Tizlenmäniň ölçeg birligi $\dfrac{m}{sek^2}$.

16.2. Hereketi koordinatalaýyn usulda berlende nokadyň tizlenmesi.

Goý, nokadyň hereketi koordinatalaýyn usulda berlen bolsun. Ýagny nokadyň hereket deňlemesi $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ deňlemeler bilen berlen bolsun.

Nokadyň koordinatalar başlangyjyndan geçirilen radius-wektory

$$\vec{r} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

(16.2) formuladan alarys:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{k}$$

ýa-da

$$\vec{a} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k} \qquad (16.4)$$

Bu ýerden tizlenmäniň koordinata oklary boýunça düzüjileri üçin

$$a_x = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \ddot{y} \equiv \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \ddot{z} \equiv \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (16.5)$$

deňlikleri alarys. Tizlenmäniň ululygy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (16.6)$$

formula bilen tapylýar. Tizlenmäniň ugrukdyryjy kosinuslary

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) = \frac{a_x}{a},\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) = \frac{a_y}{a},\ \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k}\right) = \frac{a_z}{a} \qquad (16.7)$$

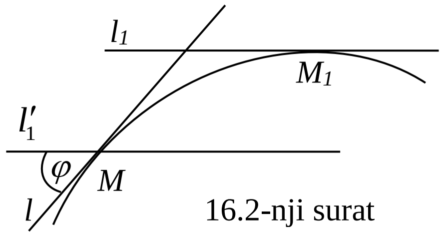
formula bilen kesgitlenýär.

16.3. Tebigy üçgranlyk. Tebigy koordinata oklary.

Bu temany beýan etmezden öň matematiki analizden käbir kesgitlemeleri we düşünjeleri getireliň. Erkin egriçyzyga seredeliň; M, M_1-egride alnan nokatlar.

l–M nokatda egrä geçirilen galtaşma;

l_1–M_1 nokatda egrä geçirilen galtaşma.



16.2-nji surat

l_1 göni çyzygy M nokada parallel göçüreliň we l_1' bilen belgiläliň.

Kesgitleme. l we l_1' gönüleriň arasyndaky φ burça MM_1 duganyň *aralyk burçy* diýilýär.

Kesgitleme. Aralyk burçunyň MM_1 duganyň uzynlygyna gatnaşygynyň MM_1 duganyň uzynlygynyň nola ymtylandaky predeline egriniň M nokatdaky egriligi diýilýär:

$$k = \lim_{\overset{\cup}{MM_1} \to 0} \frac{\varphi}{\overset{\cup}{MM_1}} \tag{16.8}$$

k–egriniň M nokatdaky egriligi.

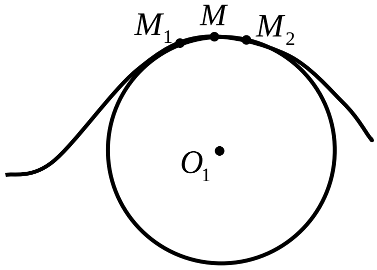
Kesgitleme. Egriniň nokatdaky egriligine ters ululyga egriniň nokatdaky *egrilik radiusy* diýilýär:

$$\rho = \frac{1}{k} \tag{16.9}$$

ρ–egriniň M nokatdaky egrilik radiusy.

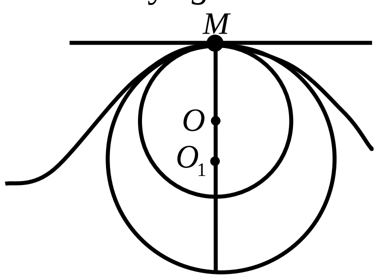
Bellik. Töweregiň egrilik radiusy öz radiusyna deň $(\rho = R)$, göni çyzygyň egrilik radiusy tükeniksizlik, $(\rho = \infty)$.

Egriçyzygyň üstünde bir gönüde ýatmaýan M_1, M, M_2 üç sany nokat alalyň. Mälim bolşy ýaly, bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokadyň üstünden töwerek geçirip bolýar. M, M_1, M_2 nokatlaryň üstünden geçýän töweregiň merkezini O_1 bilen belgiläliň.



16.3-nji surat

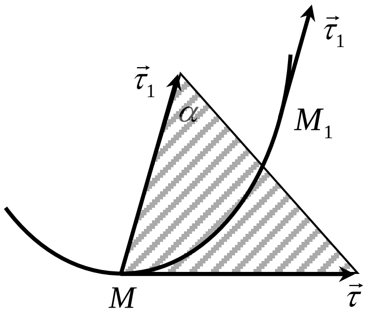
Kesgitleme. M_1,M_2 nokatlar M nokada tükeniksiz ýakynlaşanda seredilýän töweregiň predel töweregine egriniň M nokatdaky *egrilik töweregi* diýilýär.



16.4-nji surat

Bellik. Egrilik töwereginiň radiusy egrä nokatda geçirilen galtaşýana perpendikulýar we egriniň nokatdaky egrilik radiusyna deň.

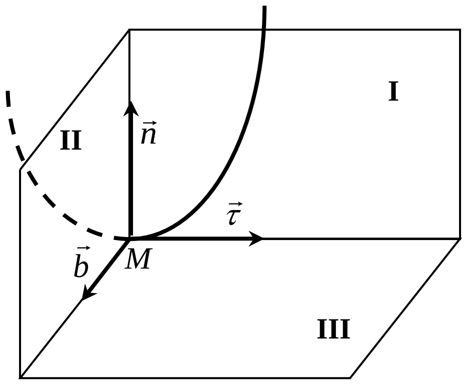
Indi temanyň beýanyna geçeliň. Käbir egriçyzyga seredeliň.



16.5-nji surat

$\vec{\tau}$ -egriçyzyga *M* nokatda galtaşýan birlik wektor;
$\vec{\tau}_1$-egriçyzyga M_1 nokatda galtaşýan birlik wektor;
$\vec{\tau}_1$ wektory *M* nokada parallel göçüreliň. $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ wektorlaryň üstünden α tekizlik geçireliň.

Kesgitleme. M_1 nokat *M* nokada tükeniksiz ýakynlaşanda α tekizligiň predel tekizligine egriçyzygyň *M* nokatdaky *galtaşma tekizligi* diýilýär. (16.6-njy suratda I tekizlik)



16.6-njy surat

Kesgitleme. *M* nokatdan geçýän hem-de $\vec{\tau}$ wektora perpendikulýar tekizlige *normal tekizlik* diýilýär. (16.6-njy suratda II tekizlik)

Kesgitleme. Galtaşma we normal tekizlikleriň kesişmesinde alynýan göni çyzyga *baş normal* diýilýar.

Baş normalyň üstünde, egriçyzygyň epilme tarapyna ugrukdyrylan birlik $\vec{n}$ wektory alyp goýalyň.

Kesgitleme. *M* nokatdan geçýän hem-de $\vec{n}$ wektora perpendikulýar tekizlige *gönükdiriji tekizlik* diýilýär (16.6-njy suratda III tekizlik).

Normal we gönükdiriji tekizlikleriň kesişmesinde alynýan göni çyzyga *binormal* diýilýär.

Binormalyň üstünde birlik $\vec{b}$ wektoryny alyp goýalyň. Şeýlelikde, $\left(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\right)$ “üçlük” sag oriýentasiýaly “üçlügi” emele getirmeli.

$\left(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}\right)$ “üçlügiň” emele getirýän üçgranlygyna **tebigy üçgranlyk** diýilýär.

Bu wektorlar bilen kesgitlenen koordinata oklaryna tebigy koordinata oklary diýilýär.

16.4. Nokadyň tizlenmesiniň tebigy koordinata oklary boýunça düzüjileri. Goý, nokadyň hereketi tebigy usulda berlen bolsun, $s = s(t)$. Bilşimiz ýaly, nokadyň tizligi galtaşýan boýunça ugrukdyrylan. Diýmek,

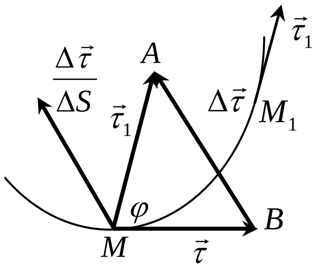
$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau} \ , \tag{16.10}$$

bu ýerde υ-tizligiň algebraik bahasy. $\vec{\tau}$–galtaşýan boýunça duga koordinatasynyň artma tarapyna ugrukdyrylan birlik wektor. (16.10) deňligi differensirläp alarys:

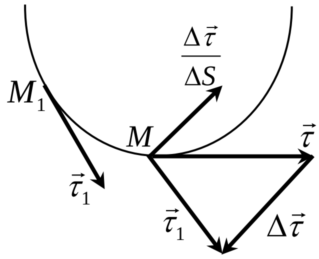
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} + \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} \tag{16.11}$$

$\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ wektoryň ugruny we ululygyny kesgitläliň.

M– *t* wagt pursatynda nokadyň traýektoriýadaky orny;
M_1 – t_1 wagt pursatynda nokadyň traýektoriýadaky orny;



16.7-nji surat *a*)



16.7-nji surat *b*)

Bu ýerde Δs-duga koordinatasynyň artdyrmasy, $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}$. $\Delta\vec{\tau} - \vec{\tau}$ wektoryň artdyrmasy. Hereket duga koordinatasynyň artma tarapyna bolup geçende (16.7-nji surat (a)) $\Delta\vec{\tau}$ wektor traýektoriýanyň epilme tarapyna, hereket duga koordinatasynyň kemelme tarapyna bolup geçende (16.7-nji surat (b)) $\Delta\vec{\tau}$ wektor traýektoriýanyň güberçek tarapyna ugrukdyrylan.

$\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ wektory özgerdip ýazalyň:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \upsilon \tag{16.12}$$

$\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ wektor traýektoriýanyň epilme tarapyna ugrukdyrylan (16.7-nji surat (a),(b)).

$\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ wektor $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ wektorlaryň üstünden geçýän tekizlikde ýatýar. Diýmek, $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ wektor galtaşma tekizliginde ýatýar.

$(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1$ deňligi differensirläliň:

$$\frac{d}{ds}(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 0 \ ,$$

bu ýerden $2\left(\frac{d\vec{\tau}}{ds},\vec{\tau}\right)=0$. Bu deňlik $\vec{\tau},\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ wektorlaryň perpendikulýardyklaryny görkezýär, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}\perp\vec{\tau}$. Şeýlelik bilen, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ wektor traýektoriýanyň egrilik merkezine tarap ugrukdyrylan. Bu wektoryň ululygyny kesgitläliň. *MAB* deňýanly üçburçlukdan (sur.16.7 (*a*)) $|\Delta\vec{\tau}|=2\sin\frac{\varphi}{2}$,

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\lim_{\Delta S\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s}=k=\frac{1}{\rho}$$

Bellik. Ýokarda geçirilen amallarda birinji ajaýyp predel ulanyldy:

$$\Delta s\to 0\Rightarrow\varphi\to 0\Rightarrow\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}=1\ .$$

Onda $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\frac{\vec{n}}{\rho}$. Bu ýerden (16.12) deňligi ulanyp, (16.11)-den alarys:

$$\vec{a}=\frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\cdot\vec{n} \tag{16.13}$$

Netije. Nokadyň tizlenmesi galtaşma tekizliginde ýatýar. Nokadyň tizlenmesi iki düzüjiden ybarat:

$\vec{a}_\tau=\dot{\upsilon}\cdot\vec{\tau}$ –galtaşma (tangensial) tizlenme;

$\vec{a}_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}\cdot\vec{n}$ –merkeze ymtylýan (normal) tizlenme.

Nokadyň tizlenmesiniň ululygy

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\ . \tag{16.14}$$

Nokadyň tangensial we normal tizlenmelerini kesgitlemek üçin aşakdaky formulalardan hem peýdalanyp bolar:

$$a_\tau=pr_{\vec{\upsilon}}\,\vec{a}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{\upsilon})}{\upsilon}\ , \tag{16.15}$$

bu ýerde $pr_{\vec{\upsilon}}\,\vec{a}$ -tizlenmäniň tizligiň ugruna bolan proýeksiýasy,

$$a_n=\frac{|\vec{\upsilon}\times\vec{a}|}{\upsilon} \tag{16.16}$$

16.5. Nokadyň hereketiniň hususy halatlary.

Gönüçyzykly hereket. Eger hereketiň dowamynda nokadyň normal tizlenmesi nola deň bolsa $(a_n=0)$, onda bu hereket gönüçyzyklydyr.

Deňölçegli gönüçyzykly hereket. Eger hereketiň dowamynda nokadyň tizlenmesi nola deň bolsa $(a=0)$, onda nokadyň bu hereketine gönüçyzykly deňölçegli $(\upsilon=const)$ hereket diýilýär. Bu hereketiň deňlemesi:

$$S = \upsilon \cdot t$$

Egriçyzykly deňölçegli hereket. Eger hereketiň dowamynda tangensial tizlenme nola deň bolsa $(a_\tau = 0)$, onda nokadyň hereketine egriçyzykly deňölçegli hereket diýilýär.

Deňtizlenmeli egriçyzykly hereket. Eger hereketiň dowamynda tangensial tizlenme hemişelik bolsa $(a_\tau = const)$, onda nokadyň egriçyzykly hereketine deňtizlenmeli egriçyzykly hereket diýilýär. Bu hereketiň deňlemesi:

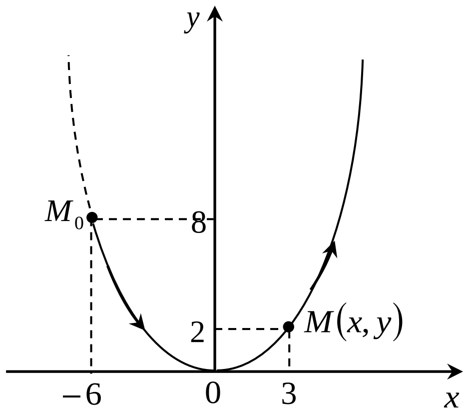
$$S = a_\tau \cdot \frac{t^2}{2} + \upsilon_0 \cdot t + s_0 \ ,$$

bu ýerde, υ_0 – nokadyň başlangyç tizligi; s_0 –başlangyç duga koordinatasy.

Käbir mysallara seredeliň.

Mysal. Nokat $x = 3(t-2)$, $y = 2(t-2)^2$ (x,y-sm, t-sek) deňleme boýunça hereket edýär. Nokadyň traýektoriýasyny, $t = 3sek$ wagt pursatynda nokadyň tizligini, tangensial, normal tizlenmelerini, tizlenmesini, şeýle-de, traýektoriýanyň egrilik radiusyny kesgitlemeli.

Çözülişi.



16.8-nji surat

$x = 3(t-2)$ deňlemeden $(t-2)$-ni x-iň üsti bilen aňladyp, $y = 2(t-2)^2$ deňlemede goýsak, nokadyň traýektoriýasynyň $y = \frac{2}{9}x^2$ deňlemesini taparys.

Eger $t = 0$ bolsa, onda $x_0 = -6$, $y_0 = 8$ bolar; (-6,8)-başlangyç pursatda nokadyň koordinatalary. Eger $t = 3$ bolsa, onda $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ bolar; (3,2)-$t = 3$sek pursatda nokadyň koordinatalary.

$$\upsilon_x = \dot{x} = 3 \, , \, \upsilon_y = \dot{y} = 4(t-2)$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{9 + 16(t-2)^2} \ , \ \upsilon\big|_{t=3sek} = 5\, sm/sek$$

$$a_x = \ddot{x} = 0 \ , \ a_y = \ddot{y} = 4 \ , \ a = 4\frac{sm}{sek^2}$$

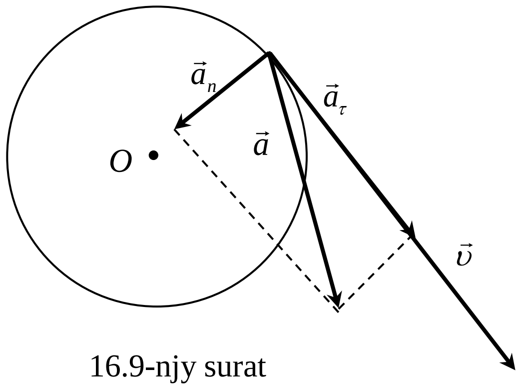
$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{16(t-2)}{\sqrt{9+16(t-2)^2}}\Bigg|_{t=3} = \frac{16}{5}\frac{sm}{sek^2} = 3{,}2\, sm/sek^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{16 - \frac{256}{25}} = \frac{12}{5}\frac{sm}{sek^2} = 2{,}4\, {}^{sm}\!/\!_{sek^2}$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{25 \cdot 5}{12} m \approx 10{,}4\, m.$$

Mysal. Nokat radiusy $r = 50\,sm$ bolan töwerekde $s = \pi \cdot t^2\ (sm)$ deňleme boýunça hereket edýär. $t = 2\,sek$ wagt pursatynda nokadyň tizligini, galtaşma, merkeze ymtylýan, doly tizlenmelerini kesgitlemeli.

Çözülişi.



16.9-njy surat

$$\upsilon = \dot{s} = 2\pi \cdot t$$

$$\upsilon\Big|_{t=2sek} = 4\pi \frac{sm}{sek} = 12{,}56 \frac{sm}{sek}$$

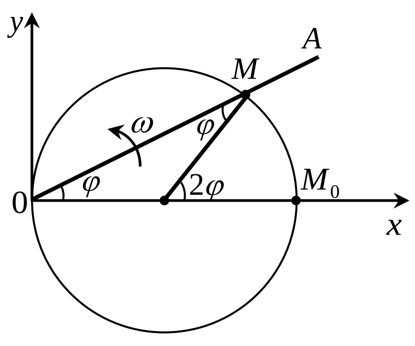
$$a_\tau = \ddot{s} = 2\pi \frac{sm}{sek^2} = 6{,}28 \frac{sm}{sek^2}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \frac{\left(4\pi \frac{sm}{sek}\right)^2}{50\,sm} = \frac{16\pi^2 \frac{sm^2}{sek^2}}{50\,sm} \approx 3{,}15 \frac{sm}{sek^2}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \approx 7{,}02 \frac{sm}{sek^2}$$

Mysal. Radiusy $R = 10\,sm$ bolan töwerege M halkajyk ildirilen. Halkajygyň içinden, O nokadyň daşyndan $\omega = \frac{\pi}{10}\frac{1}{sek} = const$ burç tizlikli aýlanýan OA steržen geçýär. Halkajygyň tizligini we tizlenmesini kesgitlemeli.

Çözülişi. Koordinatalar başlangyjyny O nokatdan alalyň.



16.10-njy surat

ω burç tizligiň hemişelikdigi sebäpli $\varphi = \frac{\pi}{10} t$.

Halkajygyň hereket deňlemesi: $\begin{cases} x = R + R\cos 2\varphi = R\left(1+\cos\frac{\pi}{5}t\right) \\ y = R\sin 2\varphi = R\sin\frac{\pi}{5}t \end{cases}$

Bu ýerden halkajygyň tizligi: $\begin{cases} \vartheta_x = \dot{x} = -2\pi\sin\frac{\pi}{5}t \\ \vartheta_y = \dot{y} = 2\pi\cos\frac{\pi}{5}t \end{cases}$

Halkajygyň tizlenmesi: $\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\frac{2}{5}\pi^2\cos\frac{\pi}{5}t \\ a_y = \ddot{y} = -\frac{2}{5}\pi^2\sin\frac{\pi}{5}t \end{cases}$

Onda: $\begin{cases} \vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = 2\pi\frac{sm}{sek} = const \\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{2}{5}\pi^2\frac{sm}{sek^2} = const \end{cases}$

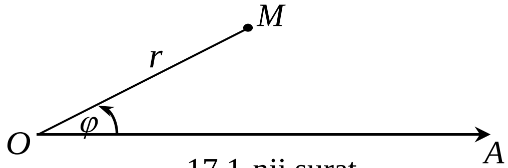
Halkajyk töwerek boýunça deňölçegli hereket edýär $(\upsilon = const, a_\tau = 0)$; halkajygyň doly tizlenmesi onuň normal tizlenmesine deň.

§17. Nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlende onuň tizligi we tizlenmesi.

1. **Nokadyň polýar koordinatalary.**
2. **Polýar we dekart koordinatalarynyň arabaglanyşygy.**
3. **Nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlende onuň tizligi.**
4. **Nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlende onuň tizlenmesi.**

17.1. Nokadyň polýar koordinatalary.

Polýar koordinatalar sistemasy saýlanyp alnan, O nokat (polýus), bu nokatdan çykýan OA ok we uzynlyklary kesgitlemek üçin girizilen masştab bilen berilýär. Nokadyň tekizlikdäki orny 2 sany ululyk bilen kesgitlenýär: $r = OM$ –polýar radiusy; $\varphi = \angle AOM$ –polýar burçy.



17.1-nji surat

Eger φ burç OA okdan sagat diliniň hereketiniň tersine alnyp goýulsa položitel, sagat diliniň hereketiniň hereketiniň ugruna alnyp goýulsa, otrisatel hasaplanylýar.

r, φ ululyklara M nokadyň **polýar** koordinatalary diýilýär we şeýle belgilenýär: $M(r, \varphi)$.

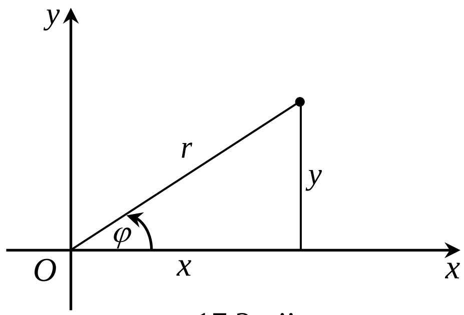
17.2. Polýar we dekart koordinatalarynyň arabaglanyşygy.

Eger polýus hökmünde dekart koordinatalar sistemasynyň başlangyjy, polýar ok hökmünde Ox ok kabul edilse (17.2-nji surat), onda görşümiz ýaly, nokadyň dekart we polýar koordinatalarynyň arasynda şeýle baglanyşyk bar:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{17.1}$$

Dekart koordinatalaryndan polýar koordinatalara geçiş formulasy:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{17.2}$$



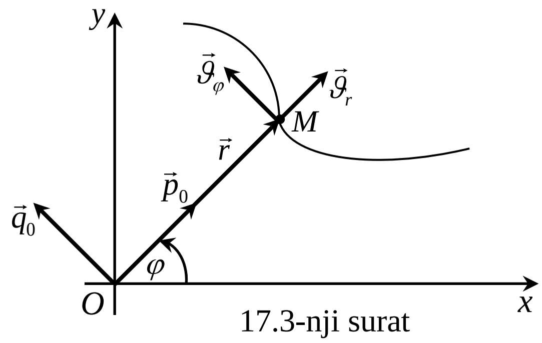
17.2-nji surat

17.3. Nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlende onuň tizligi.

Goý, nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlen bolsun, ýagny nokadyň polýar koordinatalarynyň wagta bagly üýtgeýişleri mälim bolsun:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \tag{17.3}$$

Bu ýerde $r(t)$, $\varphi(t)$ wagta bagly iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar.



17.3-nji surat

Nokadyň polýar radius-wektorynyň ugry boýunça birlik $\vec{p}_0$ wektory, bu wektora perpendikulýar birlik $\vec{q}_0$ wektory alyp goýalyň:

$$\begin{cases} \vec{p}_0 = (\cos\varphi, \sin\varphi) \\ \vec{q}_0 = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi) \end{cases} \tag{17.4}$$

Bu wektorlaryň önümlerini hasaplalyň:

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}}_0 = (-\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}\cdot(-\sin\varphi, \cos\varphi) = \dot{\varphi}\vec{q}_0 \\ \dot{\vec{q}}_0 = (-\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}, -\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}) = -\dot{\varphi}\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi) = -\dot{\varphi}\,\vec{p}_0 \end{cases}$$

Şeýle deňlikler alyndy:

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}}_0 = \dot{\varphi}\cdot\vec{q}_0 \\ \dot{\vec{q}}_0 = -\dot{\varphi}\cdot\vec{p}_0 \end{cases} \tag{17.5}$$

$\vec{p}_0$ wektoryň birlik wektordygy sebäpli

$$\vec{r} = r\cdot\vec{p}_0 \tag{17.6}$$

Belli bolşy ýaly, nokadyň tizligi onuň radius-wektorynyň önümine deň. Onda:

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\cdot\vec{p}_0 + r\cdot\dot{\vec{p}}_0 = \dot{r}\cdot\vec{p}_0 + r\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{q}_0 \tag{17.7}$$

Görşümiz ýaly, nokadyň tizligi iki sany özara perpendikulýar düzüjilerden durýar: $\vec{\upsilon}_r = \dot{r}\cdot\vec{p}_0$-radial tizlik, $\vec{\upsilon}_\varphi = r\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{q}_0$-transwersal tizlik

$$\begin{cases} \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\varphi; \\ \upsilon^2 = \upsilon_r^2 + \upsilon_\varphi^2 \\ \upsilon = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\cdot\dot{\varphi})^2} \end{cases} \tag{17.8}$$

17.4. Nokadyň hereketi polýar koordinatalarda berlende onuň tizlenmesi.

Nokadyň tizlenmesini tapmak üçin (17.7) deňligi differensirläliň:

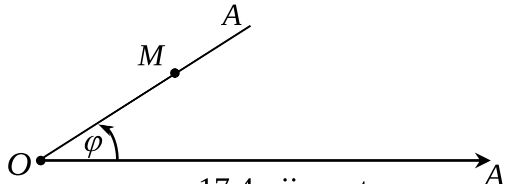
$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \ddot{r}\cdot\vec{p}_0 + \dot{r}\cdot\dot{\vec{p}}_0 + (\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})\cdot\vec{q}_0 + r\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\vec{q}}_0 = \ddot{r}\cdot\vec{p}_0 + \dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{q}_0 +$$
$$+(\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})\cdot\vec{q}_0 - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\vec{p}_0 = (\ddot{r} - r\cdot\dot{\varphi}^2)\cdot\vec{p}_0 + (2\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})\cdot\vec{q}_0$$

Şeýlelik bilen, nokadyň tizlenmesi özara perpendikulýar iki sany düzüjilerden durýar: $\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\cdot\dot{\varphi}^2)\cdot\vec{p}_0$–radial tizlenme hem-de $\vec{a}_\varphi = (2\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})\cdot\vec{q}_0$–transwersal tizlenme,

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi \\ a^2 = a_r^2 + a_\varphi^2 \\ a = \sqrt{(\ddot{r} - r\cdot\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\cdot\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})^2} \end{cases}. \tag{17.9}$$

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. Gorizontal OA göni çyzyk boýunça nokat $OM = 0{,}5t^2$(sm) deňlemä laýyklykda hereket edýär. OA göni çyzyk O nokatdan geçýän wertikal okuň daşyndan $\varphi = t^2 + t$ (rad) deňlemä laýyklykda aýlanýar. $t = 2$sek wagt pursatynda nokadyň tizliginiň we tizlenmesiniň radial, transwersal düzüjilerini kesgitlemeli.



17.4-nji surat

Çözülişi. Nokadyň polýar koordinatalarda hereket deňlemesi:

$$\begin{cases} r = 0,5t^2 \\ \varphi = t^2 + t \end{cases}$$

Onda.

$$\upsilon_r = \dot{r} = t \ , \ \ \upsilon_r\big|_{t=2sek} = 2\, {}^{sm}\!\!/_{sek}$$

$$\upsilon_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = 0,5t^2 \cdot (2t+1) \ \ , \ \ \upsilon_\varphi\big|_{t=2sek} = 10\, {}^{sm}\!\!/_{sek}$$

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 = 1 - 0,5t^2 \cdot (2t+1)^2 \ \ , \ \ a_r\big|_{t=2sek} = -49\, {}^{sm}\!\!/_{sek^2}$$

$a_r = 0$; diýmek, nokadyň radial tizligi O polýusa tarap ugrukdyrylan.

$$a_\varphi = 2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi} = 2t \cdot (2t+1) + t^2 = 5t^2 + 2t \ \ , \ \ a_\varphi\big|_{t=2sek} = 24\, {}^{sm}\!\!/_{sek^2}$$

§18. Egriçyzykly koordinatalarda nokadyň tizligi, tizlenmesi.

1. **Egriçyzykly koordinatalar.**
2. **Koordinata çyzyklary, koordinata üstleri.**
3. **Lameniň koeffisiýentleri.**
4. **Nokadyň tizligi.**
5. **Nokadyň tizlenmesi.**
6. **Silindrik koordinatalarda nokadyň tizligi we tizlenmesi.**
7. **Sferik koordinatalarda nokadyň tizligi we tizlenmesi.**

18.1. Egriçyzykly koordinatalar.

Bilşimiz ýaly, nokat giňişlikde üç koordinata bilen kesgitlenýär. Meselem, x, y, z-dekart koordinatalar; ρ, φ, z-silindrik koordinatalar; r, θ, φ-sferik koordinatalar.

Goý, q_1, q_2, q_3-nokady giňişlikde kesgitleýan käbir parametrler bolsun. Bu parametrleri **egriçyzykly koordinatalar** diýip atlandyralyň. $\vec{r}$-nokada gozganmaýan nokatdan geçirilen radius-wektor. Elbetde, radius-wektor egriçyzykly koordinatalara bagly,

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \tag{18.1}$$

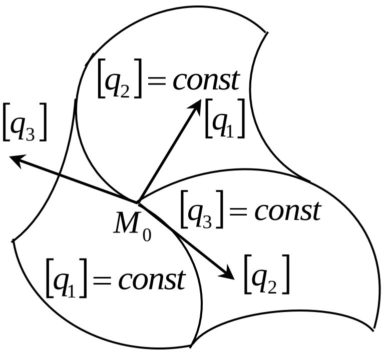
Şeýle hem, radius-wektoryň dekart koordinata oklaryna bolan proýeksiýalary egriçyzykly koordinatalara bagly

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \tag{18.2}$$

18.2. Koordinata çyzyklary, koordinata üstleri.

(18.2) deňlikde iki koordinatany, meselem, q_2, q_3 koordinatalary fiksirläp 3-nji koordinatany (q_1) erkin hasap edeliň; $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$. Elbetde, $M_0(q_1, q_{20}, q_{30})$ nokat giňişlikde egriçyzyk çyzar. Bu egriçyzyga q_1 koordinata degişli **koordinata çyzygy** diýilýär. Şuňa meňzeşlikde q_2, q_3 koordinata çyzyklary kesgitlenýär.

Giňişlikde islendik M_0 nokatdan 3 sany koordinata çyzyklary geçýär.



18.1-nji surat

M_0 nokatdan çykýan koordinata çyzyklaryna galtaşýan, degişli koordinatanyň artýan tarapyna ugrukdyrylan oklara **koordinata oklary** diýilýär. 18.1-nji suratda, $[q_1],[q_2],[q_3]$.

(18.2) deňlikde bir koordinatany fiksirläp, ikisini erkin diýip hasap etsek, onda bu deňlik käbir üsti berýär. Bu üste **koordinata üsti** diýilýär.
Şeýlelik bilen, M_0 nokatda üç sany koordinata üstleri kesgitlenýär.

M_0 nokatda koordinata üstlerine geçirilen galtaşma tekizliklerine **koordinata tekizlikleri** diýilýär.

Koordinata çyzyklary:

$$q_1\text{-}erkin\ ,\ q_2 = const\ ,\ q_3 = const$$
$$q_1 = const\ ,\ q_2\text{-}erkin\ ,\ q_3 = const$$
$$q_1 = const\ ,\ q_2 = const\ ,\ q_3\text{-}erkin.$$

Koordinata üstleri:

$$q_1 = const\ ,\ q_2, q_3\text{-}erkin$$
$$q_2 = const\ ,\ q_1, q_3\text{-}erkin$$
$$q_3 = const\ ,\ q_1, q_2\text{-}erkin$$

18.3. Lameniň koeffisiýentleri.

Koordinata oklarynda birlik $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ wektorlary alyp goýalyň (degişli koordinatanyň artýan tarapyna ugrukdyrylan). Matematiki analiz kursundan belli bolşy ýaly, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\ (i=1,2,3)$ degişli koordinata oky boýunça, koordinatanyň artýan tarapyna ugrukdyrylan wektor

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k} \tag{18.3}$$

Bu wektoryň moduly

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = H_i\ \ (i=1,2,3) \tag{18.4}$$

Bu ýerden

$$\vec{e}_i = \frac{1}{H_i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\,(i=1,2,3) \qquad (18.5)$$

H_1, H_2, H_3-ululyklara **Lameniň koeffisiýentleri** diýilýär.

Goý, mundan beýläk seredilýän egriçyzykly koordinatalar sistemasy ortogonal bolsun. Ýagny

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij}-Kronokeriň belgisi diýlip atlandyrylýan ululyk.

18.4. Nokadyň tizligi

Nokadyň hereketi egriçyzykly koordinatalarda berlende onuň tizligini tapalyň. Bilişimiz ýaly, $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$. Onda

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\cdot \dot{q}_3 = \dot{q}_1\cdot H_1\cdot \vec{e}_1 + \dot{q}_2\cdot H_2\cdot \vec{e}_2 + \dot{q}_3\cdot H_3\cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{\upsilon} = \dot{q}_1\cdot H_1\cdot \vec{e}_1 + \dot{q}_2\cdot H_2\cdot \vec{e}_2 + \dot{q}_3\cdot H_3\cdot \vec{e}_3\ , \qquad (18.6)$$

bu ýerden $\vec{e}_i$ wektorlaryň ortogonallygyny göz öňünde tutup taparys:

$$\upsilon = \sqrt{\dot{q}_1^2\cdot H_1^2 + \dot{q}_2^2\cdot H_2^2 + \dot{q}_3^2\cdot H_3^2} \qquad (18.7)$$

18.5. Nokadyň tizlenmesi

Nokadyň hereketi egriçyzykly koordinatalarda berlende onuň tizlenmesini kesgitläliň. Nokadyň tizlenmesiniň $[q_i]$ oka proýeksiýasy:

$$a_{q_i} = (\dot{\vec{\upsilon}}, \vec{e}_i) = \left(\dot{\vec{\upsilon}}, \frac{1}{H_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{H_i}\left(\dot{\vec{\upsilon}}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right).$$

Bu ýerden,

$$H_i\, a_{q_i} = \left(\dot{\vec{\upsilon}}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) - \left(\vec{\upsilon}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\right) \qquad (18.8)$$

(18.6) deňlikden alarys:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \dot{q}_i} = H_i\cdot \vec{e}_i \qquad (18.9)$$

(18.5) deňlikden görşümiz ýaly, $H_i\cdot \vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, onda (18.9) deňlikden alarys:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \qquad (18.10)$$

Käbir özgertmelere seredeliň.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\cdot \dot{q}_3\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_3}\cdot \dot{q}_3\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_1}\cdot\dot{q}_1+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_2}\cdot\dot{q}_2+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_3}\cdot\dot{q}_3 \tag{18.11}$$

Şeýle-de,

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2+\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\cdot\dot{q}_3\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_1}\cdot\dot{q}_1+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_2}\cdot\dot{q}_2+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_3}\cdot\dot{q}_3$$

Diýmek,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial q_i} \tag{18.12}$$

(18.8) deňlikden (18.10) we (18.12) deňlikleri göz önünde tutup taparys:

$$H_i\,a_{q_i}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon},\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)-\left(\vec{\upsilon},\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon},\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\left(\vec{\upsilon},\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial q_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\vec{\upsilon},\vec{\upsilon})\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{\upsilon},\vec{\upsilon})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)$$

Bu ýerden

$$a_{q_i}=\frac{1}{H_i}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right\}\quad(i=1,2,3) \tag{18.13}$$

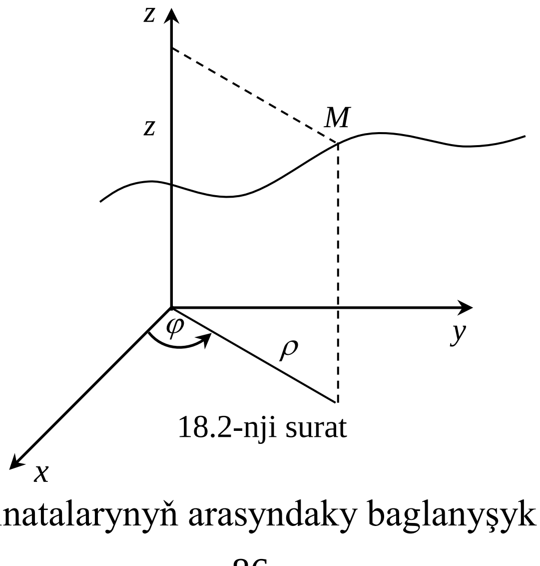
(18.13) deňlik nokadyň tizlenmesiniň q_1, q_2, q_3 koordinatalar boýunça düzüjilerini kesgitleýär.

18.6. Silindrik koordinatalarda nokadyň tizligi we tizlenmesi.

Goý, nokadyň hereketi silindrik koordinatalarda berlen bolsun:

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \varphi=\varphi(t)\\ z=z(t)\end{cases} \tag{18.14}$$

Nokadyň tizligini we tizlenmesini tapmaklyk meselesini goýalyň.



18.2-nji surat

Dekart we silindrik koordinatalarynyň arasyndaky baglanyşyk

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{18.15}$$

deňlikler bilen berilýär.

Ilki bilen Lameniň koeffisiýentlerini kesgitläliň.

$$q_1 = \rho\ ,\ q_2 = \varphi\ ,\ q_3 = z$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2} = 1\ ,$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2} = \rho\ ,$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1\ .$$

(18.6), (18.7) deňliklerden nokadyň tizliginiň düzüjilerini, şeýle-de, tizligiň ululygyny taparys:

$$\begin{cases} \upsilon_\rho = \dot\rho \\ \upsilon_\varphi = \dot\varphi\,\rho \\ \upsilon_z = \dot z \end{cases} \Rightarrow\ \upsilon = \sqrt{\dot\rho^2 + \dot\varphi^2\rho^2 + \dot z^2} \tag{18.16}$$

Eger hereket polýar koordinatalarda berlen bolsa, ýagny $\rho = r$, $\varphi = \varphi$, $z = 0$ bolsa, onda (18.16) formuladan alarys:

$$\begin{cases} \upsilon_r = \dot r \\ \upsilon_\varphi = r\dot\varphi \end{cases} \Rightarrow\ \upsilon = \sqrt{r^2 + r^2\dot\varphi^2} \tag{18.17}$$

Bellik. (18.17) formulany §17-de alypdyk.

Nokadyň tizlenmesini kesgitläliň. (18.16) formuladan alarys:

$$\upsilon^2 = \dot\rho^2 + \dot\varphi^2\rho^2 + \dot z^2$$

Tizlenmäniň düzüjileri:

$$a_\rho = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot\rho}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right\}$$

Bu ýerden degişli hasaplamalary edip, $a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2$ deňligi alarys.

$$a_\varphi = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right\}$$

Bu ýerden $a_\varphi = \ddot\varphi\rho + 2\dot\rho\dot\varphi$

$$a_z = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot z}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\right\}$$

Bu ýerden $a_z = \ddot z$. Şeýlelik bilen, nokadyň tizlenmesi:

$$\vec a = \left(\ddot\rho - \rho\cdot\dot\varphi^2,\ \ddot\varphi\cdot\rho + 2\dot\rho\cdot\dot\varphi\ ,\ \ddot z\right) \tag{18.18}$$

(18.18) deňlikde $\rho = r, \varphi = \varphi, z = 0$ goýup, nokadyň tizlenmesini polýar koordinatalarda taparys:

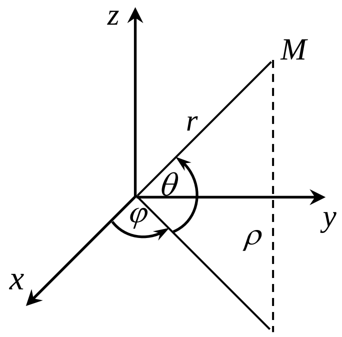
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = \ddot{\varphi} \cdot r + 2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} \end{cases} \tag{18.19}$$

Bellik. (18.19) formula §17-de hem getirilipdi.

18.7. Sferik koordinatalarda nokadyň tizligi we tizlenmesi.

Goý, nokadyň hereketi sferik koordinatalarda berlen bolsun.

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{18.20}$$



18.3-nji surat

Dekart we sferik koordinatalaryň arasyndaky baglanyşyk

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \tag{18.21}$$

deňlemeler bilen berilýär.

Lameniň koeffisiýentlerini hasaplalyň $(q_1 = r\ ,\ q_2 = \varphi\ ,\ q_3 = \theta)$. (18.4) deňligi ulanyp, taparys: $H_1 = 1$, $H_2 = r\sin\theta$, $H_3 = r$. Degişli hasaplamalary ýerine ýetirip, taparys:

$$\begin{cases} \upsilon_\rho = \dot{r}\ , \\ \upsilon_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2}\ , \\ \upsilon_z = r\dot{\theta}\ . \end{cases} \tag{18.22}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}\ , \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\ , \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta + r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\ . \end{cases} \tag{18.23}$$

$$\vec{a} = (a_r\ ,\ a_\varphi\ ,\ a_\theta) \tag{18.24}$$

Getirilen (18.22), (18.23) formulalary okyja özbaşdak çykarmak maslahat berilýär.

7-nji BAP
Gaty jisimiň kinematikasy.
§19. Gaty jisimiň ýönekeý hereketleri.

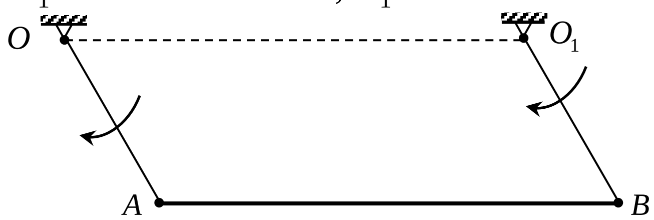
1. **Gaty jisimiň öňe bolan hereketi.**
2. **Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketi.**
3. **Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan deňölçegli we deňtizlenýän aýlanma hereketi.**
4. **Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan gaty jisimiň nokadynyň tizligi we tizlenmesi.**
5. **Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan gaty jisimiň nokadynyň tizliginiň we tizlenmesiniň wektorlaýyn kesgitlenişi.**

19.1. Gaty jisimiň öňe bolan hereketi.

Gaty jisimiň hereketiniň ýönekeý görnüşiniň biri, öňe bolan hereket bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Eger hereketlenýän gaty jisimiň islendik iki nokadyny birikdirýän göni çyzyk özüniň başlangyç halatyna parallel hereket edýän bolsa, jisimiň bu hereketine **öňe bolan hereket** diýilýär.

Bu hereketiň mysaly hökmünde, 19.1-nji suratda görkezilen AB sterženiň hereketini görkezip bolar. OA , O_1B sterženler degişlilikde O, O_1 şarnirlere birikdirilen; $OA = O_1B$. AB steržen OA , O_1B sterženler bilen şarnirli birikdirilen

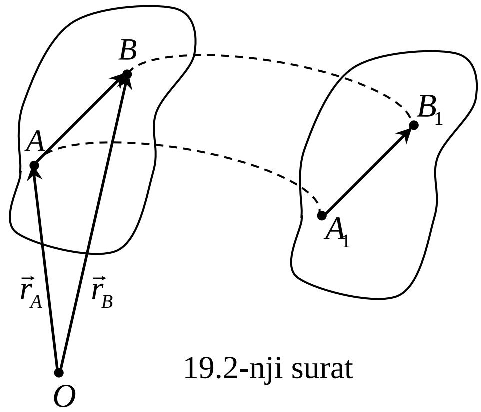


19.1-nji surat

Öňe bolan herekete degişli teoremany seljereliň.

Teorema. Öňe bolan hereketdäki jisimiň nokatlarynyň tizlikleri, şeýle-de, tizlenmeleri islendik wagt pursatynda deňdirler.

Subudy. Öňe bolan hereketdäki jisime seredeliň.



19.2-nji surat

O -erkin alnan gozganmaýan nokat;

$\vec{r}_A - A$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory;

$\vec{r}_B - B$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory.

Görşümiz ýaly,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (19.1)$$

(19.1) deňligi differensirläliň:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\overrightarrow{AB}} \qquad (19.2)$$

Seredilýän jisimiň gatydygy (nokatlaryň arasyndaky uzaklyk üýtgemeýär) we hereketiň öne bolan hereketdigi sebäpli, $\overrightarrow{AB} = const$. Onda (19.2) deňlikden alarys:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A \qquad \left(\dot{\overrightarrow{AB}} = \vec{0} \right)$$

Diýmek,

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A \qquad (19.3)$$

(19.3) deňligi differensirläliň:

$$\dot{\vec{\upsilon}}_B = \dot{\vec{\upsilon}}_A \ ,$$

bu ýerden

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \qquad (19.4)$$

Teorema subut edildi.

Bellik. Öňe bolan hereketdäki jisimiň nokatlary birmeňzeş (parallel göçürilende gabat gelýän) traýektoriýalar boýunça hereket edýärler.

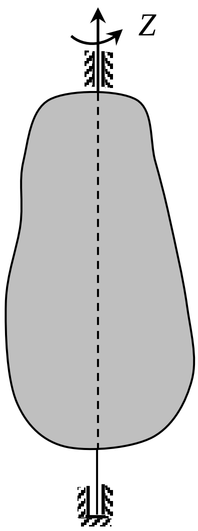
19.2-nji suratdan görnüşi ýaly, B nokadyň traýektoriýasy A nokadyň traýektoriýasyny $\overrightarrow{AB} = const$ wektor boýunça parallel göçürmek bilen alynýar.

19.2. Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketi.

Gaty jisimiň ýene bir ýönekeý hereketi bolan gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketi bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Eger hereketlenýän gaty jisimiň bir oka degişli nokatlary hereketlenmeýän bolsa, onda jisimiň bu hereketine gozganmaýan okuň daşyndan **aýlanma hereketi** diýilýär.

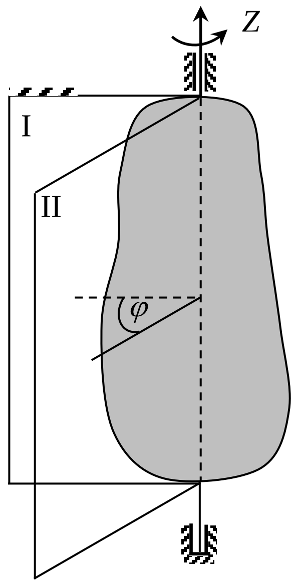
Daşyndan aýlanylýan oka **aýlanma oky** diýilýär.



Z–aýlanma oky

19.3-nji surat

Aýlanma hereketini häsiýetlendirmek üçin aýlanma burçuny girizeliň.
I–aýlanma okuny özünde saklaýan gozganmaýan tekizlik;
II– aýlanma okuny özünde saklaýan jisim bilen bagly tekizlik.



19.4-nji surat

φ–I,II tekizlikleriň arasyndaky burç. φ–burça **aýlanma burçy** diýilýär. Jisimiň aýlanýandygy sebäpli φ burç wagta görä üýtgeýär, ýagny

$$\varphi = \varphi(t) \tag{19.5}$$

$\varphi(t)$–iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýa. (19.5) deňleme gozganmaýan okuň daşyndan **aýlanma hereketiň deňlemesi** bolup durýar.

Kesgitleme. Aýlanma burçunyň üýtgeýşiniň çaltlygyny häsiýetlendirýän fiziki ululyga aýlanma hereketiň **burç tizligi** diýilýär, ýagny

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{19.6}$$

ω-aýlanýan jisimiň burç tizligi; burç tizliginiň ölçeg birligi $\frac{rad}{sek}$

Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan jisimiň burç tizligi aýlanma burçunyň wagt boýunça önümine deň.

Kesgitleme. Burç tizliginiň üýtgeýşiniň çaltlygyny häsiýetlendirýän fiziki ululyga **burç tizlenmesi** diýilýär, ýagny

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{19.7}$$

ε -aýlanýan jisimiň burç tizlenmesi. Burç tizlenmesiniň ölçeg birligi $\frac{rad}{sek^2}$

Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan jisimiň burç tizlenmesi burç tizliginiň wagt boýunça birinji önümine ýa-da aýlanma burçunyň ikinji önümine deň.

19.3. Gaty jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan deňölçegli we deňtizlenýän aýlanma hereketi.

Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketiniň käbir hususy görnüşleri bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Eger jisimiň burç tizligi hemişelik $(\omega = const)$ bolsa, onda jisimiň aýlanma hereketine *deňölçegli aýlanma hereketi* diýilýär. Deňölçegli aýlanma hereketiniň deňlemesi:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \ , \qquad (19.8)$$

bu ýerde φ_0 –başlangyç aýlanma burçy.

Kesgitleme. Eger jisimiň burç tizlenmesi hemişelik $(\varepsilon = const)$ bolsa, onda jisimiň aýlanma hereketine *deňtizlenýän aýlanma hereketi* diýilýär. Deňtizlenýän aýlanma hereketiniň deňlemesi:

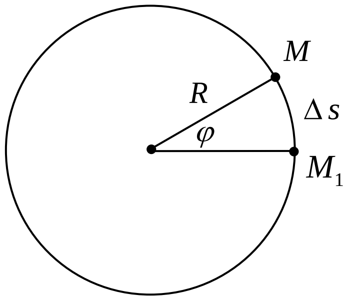
$$\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \ , \qquad (19.9)$$

bu ýerde ω_0 –jisimiň başlangyç burç tizligi; φ_0 –başlangyç aýlanma burçy.

19.4. Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan gaty jisimiň nokadynyň tizligi we tizlenmesi.

Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan jisimiň nokady merkezi aýlanma okunda bolan töwerek boýunça hereket edýär.

Jisimiň bir nokadyny saýlap alalyň. Goý, bu nokat R radiusly töwerek boýunça hereket edýän bolsun.



19.5-nji surat

Goý, nokat Δt wagtyň dowamynda M nokatdan M_1 nokada ornuny üýgedýän bolsun. $\Delta s - MM_1$ duganyň uzynlygy, $\Delta\varphi$-aýlanma burçunyň artdyrmasy.

$$\Delta s = R \cdot \Delta\varphi \qquad (19.10)$$

Nokadyň tizligi

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi} \cdot R = \omega \cdot R \ ,$$

$$\upsilon = \omega \cdot R \ . \qquad (19.11)$$

Nokadyň tizligi jisimiň burç tizliginiň nokadyň hereket edýän töwereginiň radiusyna köpeltmek hasylyna deň.

Nokadyň tizlenmesiniň düzüjileri:

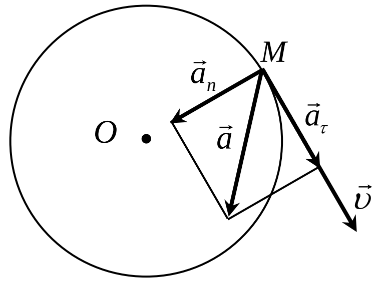
$$a_\tau = \dot{\upsilon} = \dot{\omega} \cdot R = \varepsilon \cdot R \ , \qquad (19.12)$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = \omega^2 \cdot R \ .$$

Nokadyň tizlenmesiniň ululygy:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot R)^2 + (\omega^2 \cdot R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (19.13)$$

Nokadyň tizligini we tizlenmesini şekillendireliň:



19.6-njy surat

19.5. Gozganmaýan okuň daşyndan aýlanýan gaty jisimiň nokadynyň tizliginiň we tizlenmesiniň wektorlaýyn kesgitlenişi.

Ilki bilen burç tizliginiň wektory hem-de burç tizlenmesiniň wektory düşünjeleri girizeliň.

Burç tizliginiň $\vec{\omega}$ **wektory** aýlanma oky boýunça ugrukdyrylan we onuň önünden seredeniňde aýlanma hereketi sagat diliniň hereketiniň tersine bolup geçýän ýagdaýda görünmeli. Bu wektoryň uzynlygy san taýdan burç tizliginiň modulyna deň, $|\vec{\omega}| = |\omega|$.

Burç tizlenmesiniň $\vec{\varepsilon}$ **wektory** aýlanma oky boýunça ugrukdyrylan. Bu wektor aýlanma hereketi tizlenende $\vec{\omega}$ wektor bilen ugurdaş, haýallanda bolsa, $\vec{\omega}$ wektora garşylykly ugrukdyrylan. Bu wektoryň uzynlygy san taýdan burç tizlenmesiniň modulyna deň, $|\vec{\varepsilon}| = |\varepsilon|$.

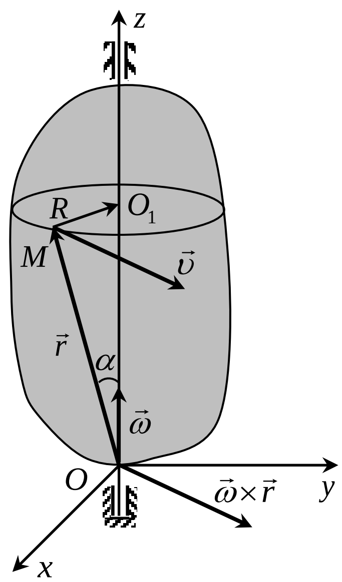
Jisimiň aýlanma okuny *z* oky hökmünde kabul edip, *Oxyz* gozganmaýan koordinatalar sistemasyny girizeliň.

$M(x, y, z)$–jisimiň nokady;

$\vec{r} - M$ nokadyň *O* nokatdan geçirilen radius–wektory;

O_1–*M* nokadyň hereket edýän töwereginiň merkezi;

R–*M* nokadyň hereket edýän töwereginiň radiusy.



19.7-nji surat

Burç tizliginiň wektory $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$, bu ýerde $\vec{k}$ -z okuň orty.

Teorema. *M* nokadyň tizligi jisimiň burç tizliginiň wektorynyň onuň radius-wektoryna wektorlaýyn köpeltmek hasylyna deň:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (19.14)$$

Subudy. Wektorlaýyn köpeltmek hasylynyň kesgitlemesine laýyklykda $\vec{\omega} \times \vec{r}$ wektor $\vec{\omega}, \vec{r}$ wektorlaryň ikisine-de perpendikulýar. Onda bu wektor OMO_1 tekizlige perpendikulýar; nokadyň $\vec{\upsilon}$ tizligi-de bu tekizlige perpendikulýar.

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ wektoryň öňünden seredeniňde $\vec{\omega}$ wektordan $\vec{r}$ wektora ýakyn aýlaw sagat diliniň hereketiniň tersine, ýagny jisimiň aýlawyna tarap bolup geçýär. Onuň uzynlygy bolsa

$$\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R \ ,$$

bu ýerde $\alpha = \left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}\right)$. Diýmek, ýokarda aýdylanlary göz öňünde tutup alarys:

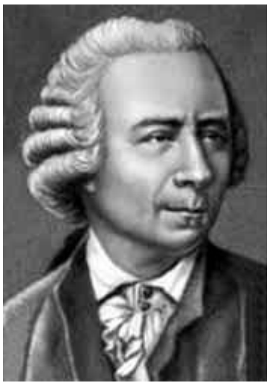
$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Teorema subut edildi.

(19.14) formulanyň analitiki görnüşi (Eýleriň formulasy):

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} \qquad (19.15)$$

$$\upsilon_x = -\omega y \ , \ \upsilon_y = \omega x \ , \ \upsilon_z = 0$$



Leonard Eýler (21.04.1707-24.01.1783)

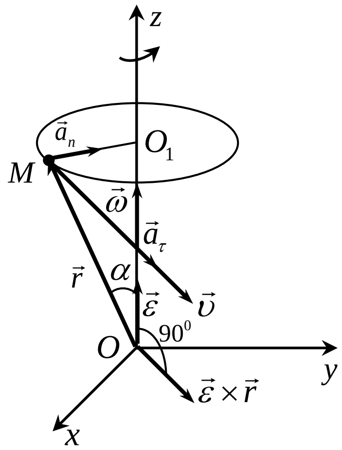
Şweýsariýaly beýik alym. Onuň matematikada, mehanikada, fizikada we tehnikada eden açyşlary adamzadyň ylym hazynasyna bimöçber goşandydyr. Alym bu açyşlaryň köpüsini Peterburg Ylymlar Akademiýasynda edýär. Leonard Eýler bu Akademiýada 31 ýyl zähmet çekýär.

M nokadyň tizlenmesini tapmak üçin (19.14) deňligi differensirläliň.

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon},$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\upsilon} \ . \qquad (19.16)$$

Nokadyň tizlenmesi iki düzüjiden ybarat: $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\upsilon}$. Bu düzüjileri öwreneliň.



19.8-nji surat

Wektorlaýyn köpeltmek hasylynyň kesgitlemesine laýyklykda $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ wektor OMO_1 tekizlige perpendikulýar. Diýmek, nokadyň hereket edýän töwereginiň radiusyna perpendikulýar; $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ wektoryň öňünden seredeniňde $\vec{\varepsilon}$ wektordan $\vec{r}$ wektora ýakyn aýlaw sagat diliniň hereketiniň tersine bolup geçmeli. Bu wektoryň uzynlygy $|\vec{\varepsilon}\times\vec{r}| = \varepsilon\cdot r\cdot\sin\alpha = \varepsilon\cdot R$. Tizlenmäniň bu düzüjisini $\vec{a}_\tau$ bilen belgiläliň: $\vec{\varepsilon}\times\vec{r} = \vec{a}_\tau$. $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ düzüjini seljereliň.

1. $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\perp\vec{\omega}$,
2. $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\perp\vec{\upsilon}$,
3. $|\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}| = \omega\cdot\upsilon\cdot\sin 90^0 = \omega\cdot\omega\cdot R = \omega^2\cdot R$.
4. $\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$ wektor O_1 nokada tarap ugrukdyrylan.

Tizlenmäniň bu düzüjisini $\vec{a}_n$ bilen belgiläliň: $\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$. Şeýlelik bilen,

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \ , \qquad a = R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \ . \tag{19.17}$$

Tizlenmäniň analitiki kesgitlenişi:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} \tag{19.18}$$

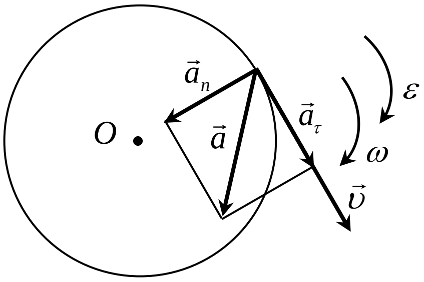
Bu ýerden nokadyň tizlenmesiniň dekart oklar boýunça düzüjilerini taparys:

$$a_x = -\varepsilon\cdot y - \omega^2\cdot x \ , \ a_y = \varepsilon\cdot x - \omega^2\cdot y \ , \ a_z = 0$$

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mesele. Radiusy $R = 0{,}5m$ bolan disk onuň merkezinden geçýän, diskiň tekizligine perpendikulýar okuň daşyndan $\varphi = \pi\cdot t^2$(rad) deňleme boýunça aýlanýar. $t = 2\,sek$ wagt pursatynda diskiň gyraky nokadynyň tizligini, tizlenmesini tapmaly.

Çözülişi.



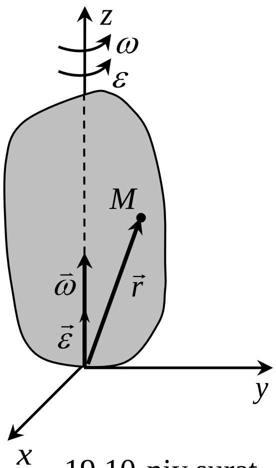
19.9-njy surat

Diskiň burç tizligi, $\omega = \dot{\varphi} = 2\pi \cdot t \;\Rightarrow\; \omega\big|_{t=2sek} = 4\pi \dfrac{1}{sek}$. Jisimiň burç tizlenmesi: $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2\pi \dfrac{1}{sek^2}$. Nokadyň tizligi: $\upsilon = \omega \cdot R \Rightarrow \upsilon = 2\pi \dfrac{m}{sek}$. Nokadyň tizlenmesiniň düzüjileri: $a_\tau = \varepsilon \cdot R,\; a_\tau = \pi \dfrac{m}{sek^2},\; a_n = \omega^2 \cdot R,\; a_n = 8\pi^2 \dfrac{m}{sek^2}$

Nokadyň tizlenmesi, $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Bu ýerden

$$a = 2\pi\sqrt{1 + 64\pi^2}\,\frac{m}{sek^2} \approx 157{,}9\frac{m}{sek^2}.$$

Mesele. Jisim Z okunyň daşynda $\varphi = t^3$(rad) deňleme boýunça aýlanýar. $t = 3$ sek wagt pursatynda $M(1,1,1)$ nokadyň tizligini we tizlenmesini wektorlaýyn kesgitlemeli. x, y, z–santimetrde ölçenýär.



19.10-njy surat

Çözülişi. Jisimiň $\vec{\omega}$ burç tizligini, $\vec{\varepsilon}$ burç tizlenmesini tapalyň.

$$\vec{\omega} = (0,0,\dot{\varphi}) = \left(0,0,3t^2\right) \Rightarrow \vec{\omega}\big|_{t=3sek} = (0,0,27),$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = (0,0,6t) \;\Rightarrow\; \vec{\varepsilon}\big|_{t=3sek} = (0,0,18),$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 27 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \cdot \left(\vec{i} - \vec{j}\right) = (-27, 27, 0).$$

Bu ýerden $\upsilon = \sqrt{(-27)^2 + 27^2 + 0^2} \approx 38{,}2\dfrac{sm}{sek}$.

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 18\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 27\\ -27 & 27 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-18\cdot\left(\vec{i}-\vec{j}\right)-27\cdot\left(27\vec{i}+27\vec{j}\right)=\left(-747,-711,0\right).$$

Bu ýerden $a=\sqrt{\left(-747\right)^2+\left(-711\right)^2+0^2}\approx 1031{,}3\dfrac{sm}{sek^2}$

§20. Tekiz–parallel hereket.

1. **Jisimiň tekiz-parallel hereketi. Tekiz-parallel hereketiň deňlemesi.**
2. **Tekiz hereketiň kinematiki häsiýetlendirijileri.**
3. **Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlikleri. Tizlikleriň paýlanyşy. Tekiz figuranyň iki nokadynyň tizlikleriniň proýeksiýalary barada teorema.**
4. **Tizlikleriň pursatdaky merkezi (TPM).**
5. **Tizlikleriň pursatdaky merkezini kesgitlemegiň käbir usullary.**
6. **Sentroidalar.**
7. **Tekiz figuranyň nokadynyň tizlenmesi.Tizlenmeleriň paýlanyşy.**
8. **Tizlikleriň pursatdaky merkezi.**
9. **Käbir hususy halatlar.**

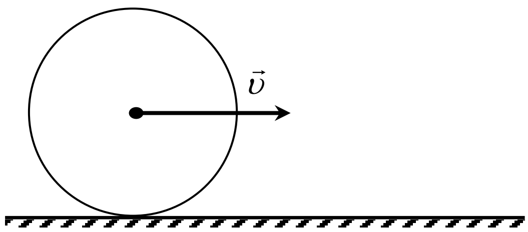
20.1. Jisimiň tekiz-parallel hereketi. Tekiz-parallel hereketiň deňlemesi.

Jisimiň tekiz-parallel hereketi we bu hereketiň aýratynlyklary bilen tanyşalyň.

Kesgitleme. Eger gaty jisimiň nokatlary gozganmaýan tekizlige parallel tekizliklerde hereket edýän bolsalar, onda jisimiň bu hereketine *tekiz-parallel* (ýa-da tekiz) hereket diýilýär.

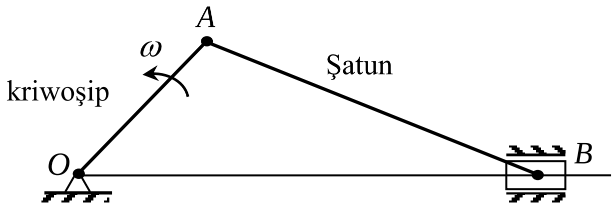
Tekiz-parallel hereketiň mysallary.

a) Tigiriň göni çyzykly ýoldaky hereketi.



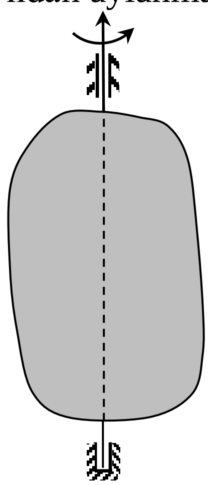
20.1-nji surat

b) Kriwoşip-şatun mehanizmiň şatunynyň hereketi.



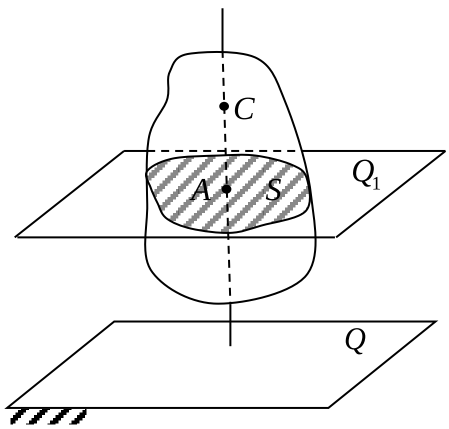
20.2-nji surat

ç) Jisimiň gozganmaýan okuň daşyndan aýlanma hereketi.



20.3-nji surat

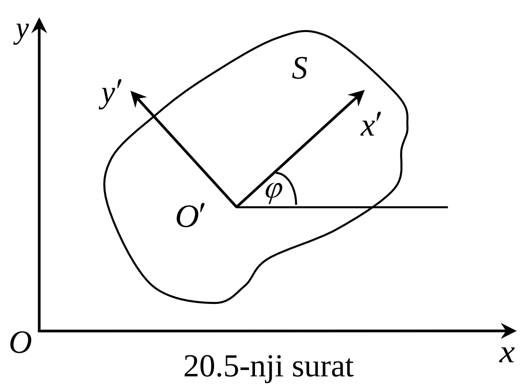
Goý, jisim gozganmaýan Q tekizlige parallel hereket edýän bolsun. Jisimi Q tekizlige parallel Q_1 tekizlik bilen keseliň. Jisimiň kese-kesiginde alynýan S figura seredeliň.



20.4-nji surat

S figuranyň tekizligine perpendikulýar AC göni çyzyk geçireliň (A-S figura degişli nokat). Jisimiň AC göni çyzyga degişli bolan nokatlary birmeňzeş hereket edýärler. Diýmek, tekiz hereketi öwrenmek üçin S figuranyň hereketini öwrenmek ýeterlik.

Figuranyň tekizliginde gozganmaýan Oxy koordinatalar sistemasyny, şeýle-de, figura bilen bagly $O'x'y'$ koordinatalar sistemasyny alalyň.



20.5-nji surat

O'-nokat **polýus** diýlip atlandyrylýar. φ-Ox , $O'x'$ oklaryň položitel ugurlarynyň arasyndaky burç.

Figuranyň tekizlikde ýerleşişi O' nokadyň koordinatalary we φ burç bilen kesgitlenýär. Figuranyň hereket edýändigi sebäpli $x_{O'}, y_{O'}$ we φ ululyklar wagta bagly funksiýa bolup durýarlar:

$$\begin{cases} x_{O'} = f_1(t), \\ y_{O'} = f_2(t), \\ \varphi = f_3(t). \end{cases} \qquad (20.1)$$

(20.1) deňleme-figuranyň hereket deňlemesidir. f_1, f_2, f_3-wagta bagly, iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar.

Tekiz figuranyň hereketi iki hereketiň utgaşmasydyr:

I. Saýlanyp alnan polýus bilen öňe bolan hereket;

II. polýusdan geçýän, figuranyň tekizligine perpendikulýar okuň daşyndan aýlanma hereketi.

(20.1) deňlemede ilkinji iki deňleme öňe bolan hereketi, üçünjisi aýlanma hereketini kesgitleýär.

20.2. Tekiz hereketiň kinematiki häsiýetlendirijileri.

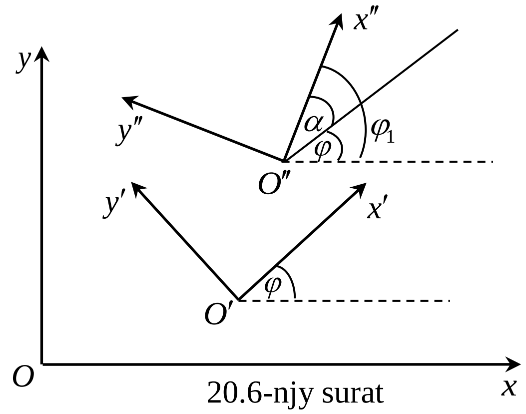
Tekiz hereketiň kinematiki häsiýetlendirijileri:

a) Öňe bolan düzüjisiniň tizligi we tizlenmesi;

b) Aýlanma düzüjisiniň burç tizligi we burç tizlenmesi.

Teorema. Tekiz figuranyň hereketiniň aýlanma düzüjisiniň kinematiki häsiýetlendirijileri, ýagny ω, ε ululyklar saýlanyp alnan polýusa bagly däl.

Subudy. Polýus hökmünde O'' nokady alalyň. Figura bilen bagly $O''x''y''$ koordinatalar sistemasyny girizeliň:



20.6-njy surat

$\varphi - Ox$, $O'x'$ oklaryň arasyndaky burç;

$\varphi_1 - Ox$, $O''x''$ oklaryň arasyndaky burç;

$\alpha - O'x'$, $O''x''$ oklaryň arasyndaky burç, $\alpha = const$;

Görşümiz ýaly, $\varphi_1 = \varphi + \alpha$. Onda

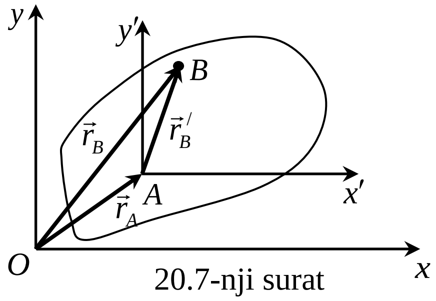
$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} = \omega$$

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi} = \varepsilon$$

Teorema subut edildi.

20.3. Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlikleri. Tizlikleriň paýlanyşy.

Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlikleriniň arasyndaky baglanyşygy ýüze çykaralyň. Figuranyň A nokadyny polýus hökmünde kabul edeliň. $Ax'y'$–öňe bolan hereketdäki koordinatalar sistemasy, $Ax' // Ox$, $Ay' // Oy$. B-figuranyň erkin saýlanyp alnan nokady.



20.7-nji surat

$\vec{r}_B - B$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_A - A$ nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_B^{/} - B$ nokadyň A nokatdan geçirilen radius-wektory;
Görşümiz ýaly,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_B^{/} \qquad (20.2)$$

Figuranyň A nokada görä hereketi bu nokadyň daşyndan aýlanma hereket bolup durýar.

(20.2) deňligi differensirläp taparys:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_B^{/}$$

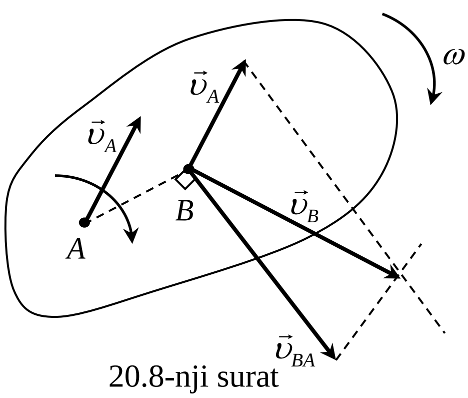
ýa-da $\vec{r}_B'$ wektoryň B nokadyň A nokadyň daşyndan aýlanma tizligidigini göz öňünde tutup alarys:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA} \qquad (20.3)$$

$\vec{\upsilon}_{BA} - B$ nokadyň A nokadyň daşyndan aýlanma tizligi:

$$\vec{\upsilon}_{BA} \perp AB \ , \ |\vec{\upsilon}_{BA}| = \omega \cdot AB \qquad (20.4)$$

$\vec{\upsilon}_{BA}$ wektor figuranyň A nokadyň daşyndan aýlanýan tarapyna ugrukdyrylan. Bu tizlikleri şekillendireliň.



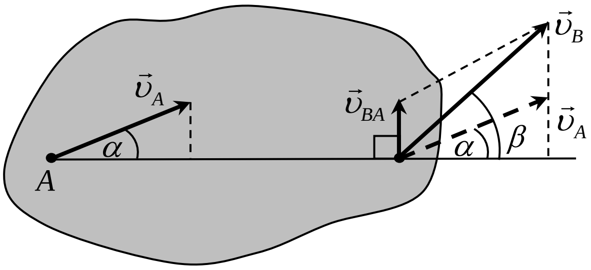
20.8-nji surat

(20.3) deňlik tekiz figuranyň nokatlarynyň **tizlikleriniň paýlanyşyny** görkezýär.

Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlikleriniň proýeksiýalary hakyndaky teoremany seljereliň.

Teorema (tizlikleriň proýeksiýalary barada). Tekiz figuranyň iki nokadynyň tizlikleriniň bu nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzyga bolan proýeksiýalary deň.

Subudy. *A*,*B*-tekiz figuranyň nokatlary; $\vec{\upsilon}_A, \vec{\upsilon}_B$-degişlilikde *A* we *B* nokatlaryň tizlikleri.



20.9-njy surat

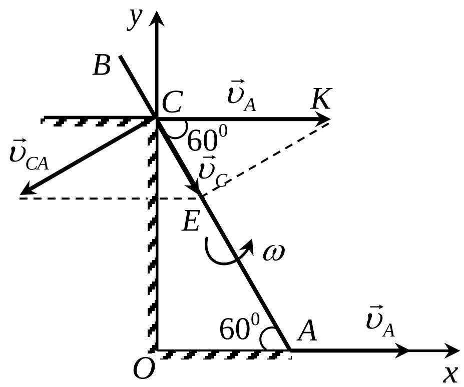
Tizlikleriň paýlanyşy boýunça: $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA}$. Bu deňligi *AB* göni çyzyga proýektirläp taparys:

$$\upsilon_B \cdot \cos\beta = \upsilon_A \cdot \cos\alpha \qquad (20.5)$$

Teorema subut edildi.

Bir mysala seredip geçeliň.

Mysal. *AB* kesim *Oxy* tekizliginde hereket edip, *A* nokady *x* oky boýunça hereket edýär. *AB* kesim *OC* sütüne daýanýar. 20.10-njy suratda görkezilen pursatda *C* nokadyň tizligini, kesimiň burç tizligini kesgitlemeli. $\upsilon_A = 4\dfrac{sm}{sek}$, $OC = 2m$



20.10-njy surat

Çözülişi. *C* nokadyň tizligi *CA* kesim boýunça ugrukdyrylan. Eger şeýle bolmasa, onda *C* nokadyň tizliginiň *CA* kesime perpendikulýar düzüjisi bolardy. Bu bolsa mümkin däl. *A* nokady polýus hökmünde kabul edeliň. Onda $\vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{CA}$.

$$\vec{\upsilon}_{CA} \perp CA \,,\, \upsilon_{CA} = \omega \cdot CA$$

CEK gönüburçly üçburçlukdan alarys:

$$\upsilon_C = \upsilon_A \cos 60^0 = 4\frac{m}{sek}\cdot\frac{1}{2} = 2\frac{m}{sek}$$

$$\upsilon_{CA} = \upsilon_A \sin 60^0 = 4\frac{m}{sek}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\frac{m}{sek}$$

Emma

$$\upsilon_{CA} = \omega \cdot CA = \omega \cdot \frac{OC}{\sin 60^0} = \omega \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{m}{sek}$$

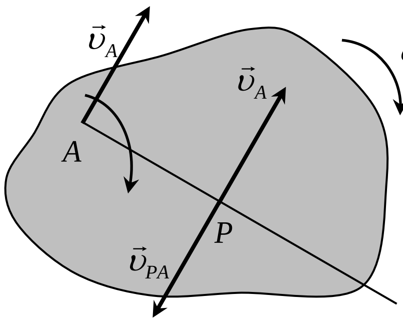
Onda bu ýerden

$$\omega \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{m}{sek} = 2\sqrt{3} \frac{m}{sek} \quad , \quad \omega = \frac{3}{2} \frac{1}{sek} = 1{,}5 \frac{1}{sek}$$

20.4. Tizlikleriň pursatdaky merkezi (TPM).

Islendik wagt pursatynda tekiz figuranyň bir nokadynyň tizligi nola deň bolýar. Şeýle nokadyň bardygyny görkezeliň.

Goý, berlen pursatda tekiz figuranyň burç tizligi we haýsy hem bolsa bir nokadynyň (meselem, *A*) nokadynyň tizligi belli bolsun.



20.11-nji surat

$\vec{\upsilon}_A$ tizligi figuranyň aýlanýan tarapyna 90^0-a öwüreliň we göni çyzyk geçireliň. Bu göni çyzygyň üstünde uzynlygy $\frac{\upsilon_A}{\omega}$ deň bolan AP kesim alyp goýalyň. *A* nokady polýus hökmünde kabul edip, *P* nokat üçin tizlikleriň paýlanyş formulasyny ulanalyň.

$$\vec{\upsilon}_P = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{PA} \; , \qquad (20.6)$$

$$\upsilon_{PA} \perp AP \; , \; \upsilon_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \cdot \frac{\upsilon_A}{\omega} = \upsilon_A \; .$$

Bu netijelerden görnüşi ýaly, $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_{PA}$ wektorlar gapma-garşylykly ugrukdyrylan, ululyklary boýunça deň. Diýmek,

$$\vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{PA} = \vec{0}$$

Onda (20.6) deňlikden alarys:

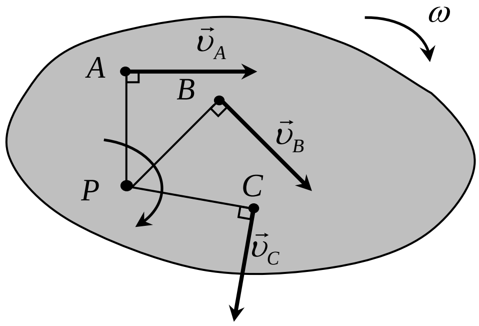
$$\vec{\upsilon}_P = \vec{0}$$

Berlen pursatda tizligi nola deň bolan nokadyň bardygyny görkezdik.

Kesgitleme. Tizligi berlen pursatda nola deň bolan nokada **tizlikleriň pursatdaky merkezi** (T.P.M.) diýilýär.

Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlikleri berlen pursatda tizlikleriň pursatdaky merkeziniň daşyndan aýlanma hereketdäki ýaly paýlanýar.

$$\begin{cases} \upsilon_A = \omega \cdot AP \\ \upsilon_B = \omega \cdot BP \\ \upsilon_C = \omega \cdot CP \end{cases}$$

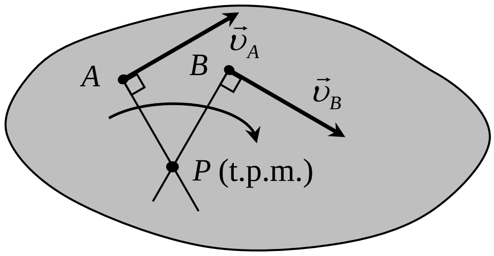


20.12-nji surat

20.4. Tizlikleriň pursatdaky merkezini kesgitlemegiň käbir usullary.

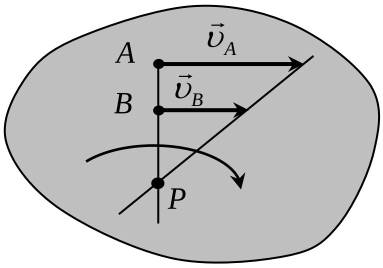
Tizlikleriň pursatdaky merkezini tapmaklygyň käbir usullary bilen tanyşalyň.

a) Eger figuranyň iki nokadynyň tizlikleriniň ugurlary belli bolsa, onda bu tizliklere geçirilen perpendikulýarlaryň kesişmesi şu pursatda tizlikleriň pursatdaky merkezi bolýar.

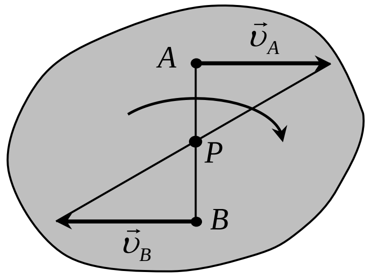


20.13-nji surat

b) Eger tekiz figuranyň *A* we *B* iki nokadynyň tizlikleri parallel bolup, *A* we *B* nokatlar tizliklere geçirilen bir perpendikulýarda ýatýan bolsalar, onda $\vec{\upsilon}_A$, $\vec{\upsilon}_B$ wektorlaryň uçlaryndan geçirilen göni çyzygyň *AB* göni çyzyk bilen kesişme nokady tizlikleriň pursatdaky merkezi bolýar.



20.14-nji surat



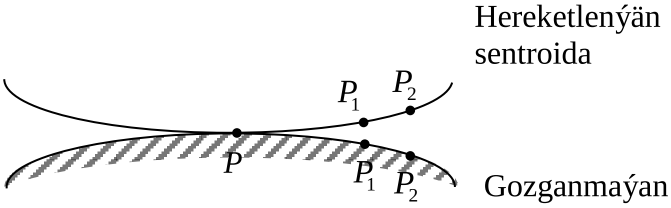
20.15-nji surat

Bellik. Eger tekiz figuranyň *A* we *B* iki nokadynyň tizlikleri parallel bolup, *A* we *B* nokatlar bir perpendikulýarda ýatmaýan bolsalar, onda figura şu pursatda öňe bolan hereket edýär, ýagny $\omega = 0$ (tizlikleriň pursatdaky merkezi tükeniksizlikde).

20.6. Sentroidalar

Kesgitleme. Tizlikleriň pursatdaky merkezleriniň figuranyň hereket edýän tekizligindäki geometrik ornuna (egriçyzyk) **gozganmaýan sentroida** diýilýär.

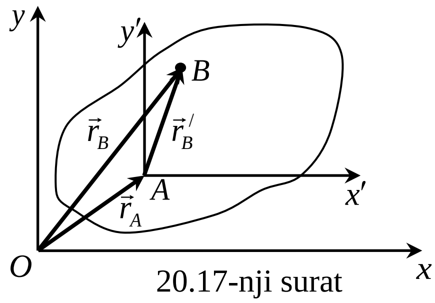
Tizlikleriň pursatdaky merkezleriniň figuranyň özünde geometrik ornuna (egriçyzyk) **hereketlenýän sentroida** diýilýär.



20.16-njy surat

Berlen pursatda sentroidalar şu purasatdaky P tizlikler merkezinde galtaşýarlar.

20.7.Tekiz figuranyň nokadynyň tizlenmesi.



20.17-nji surat

(20.2) deňligi iki gezek differensirläliň:

$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}'_B \tag{20.7}$$

Tekiz figuranyň A nokada görä hereketiniň aýlanma hereketdigini göz öňünde tutup, (20.7) deňlikden alarys:

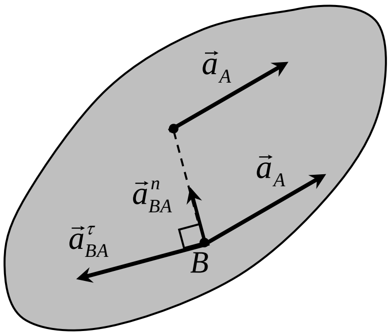
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ayl} \tag{20.8}$$

$\vec{a}_{BA}^{ayl}$ -B nokadyň A nokadyň daşyndan aýlanma hereketindäki tizlenmesi, ýagny

$$\vec{a}_{BA}^{ayl} = \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} \tag{20.9}$$

Onda (20.8) deňlikden alarys:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} \tag{20.10}$$



20.18-nji surat

$\vec{a}_{BA}^{n}$-B nokadyň A nokadyň daşyndan aýlanma hereketinde merkeze ymtylýan (normal) tizlenmesi; $\vec{a}_{BA}^{n}$-tizlenme A nokada tarap ugrukdyrylan we

$$a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB \tag{20.11}$$

ululyga deň.

$\vec{a}^{\tau}_{BA}$-*B* nokadyň *A* nokadyň daşyndan aýlanma hereketinde galtaşma (tangensial) tizlenmesi; $\vec{a}^{\tau}_{BA} \perp AB$. Aýlanma hereket tizlenende $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ wektor aýlanma tarap, haýallanda bolsa ters tarapa ugrukdyrylan we

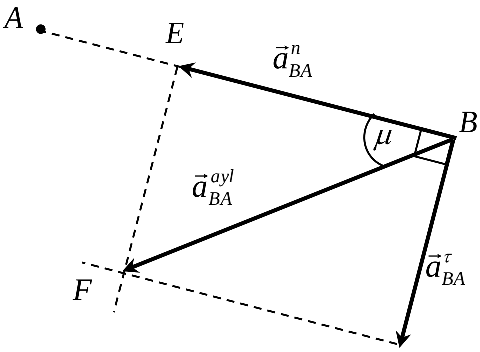
$$a^{\tau}_{BA} = |\varepsilon| \cdot AB \qquad (20.12)$$

ululyga deň.

(20.10) deňlik tekiz figuranyň nokatlarynyň **tizlenmeleriniň paýlanyşyny** görkezýär.

$\vec{a}^{ayl}_{BA}$ tizlenmäni aýratyn öwreneliň; $\vec{a}^{ayl}_{BA} = \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$,

$$a^{ayl}_{BA} = \sqrt{{a^{n}_{BA}}^2 + {a^{\tau}_{BA}}^2} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (20.13)$$



20.19-njy surat

BEF göňüburçly üçburçlukdan alarys:

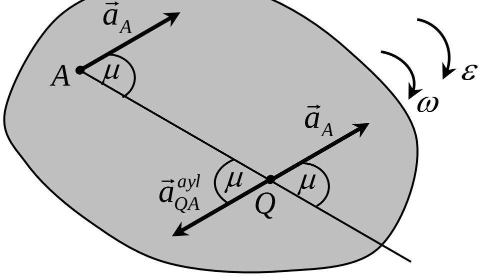
$$tg\mu = \frac{EF}{EB} = \frac{|a^{\tau}_{BA}|}{|a^{n}_{BA}|} = \frac{|\varepsilon| \cdot AB}{\omega^2 \cdot AB} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (20.14)$$

Bellik. Ýokarda *B* nokat erkin saýlanypdy. Diýmek, nokadyň polýusyň daşyndan aýlanma hereketindäki tizlenmesiniň we bu nokady polýus bilen birikdirýän kesimiň arasyndaky burç şu pursat üçin nokada bagly däl, ýagny figuranyň islendik nokady üçin

$$\mu = arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

20.8. Tizlenmeleriň pursatdaky merkezi.

Islendik wagt pursatynda tekiz figuranyň tizlenmesi şu pursatda nola deň bolan nokady bar. Şeýle nokadyň bardygyny görkezeliň. Goý, tekiz figuranyň berlen pursatda burç tizligi, burç tizlenmesi, şeýle-de, haýsy bolsa-da bir *A* nokadynyň tizlenmesi belli bolsun.



20.20-nji surat

$\vec{a}_A$ wektory $\mu = arctg\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ ýiti burça (aýlanma hereket tizlenende aýlanma tarap, aýlanma hereket haýallanda bolsa ters tarapa) öwüreliň we göni çyzyk geçireliň. Bu göni çyzygyň üstünde uzynlygy $\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$ ululyga deň bolan AQ kesim alyp goýalyň. (20.8) formuladan alarys:

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}^{ayl} .$$

(20.13) formuladan:

$$a_{QA}^{ayl} = AQ\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} = a_A .$$

Şeýlelikde, $\vec{a}_{QA}^{ayl}$, $\vec{a}_A$ wektorlar garşylykly ugrukdyrylan, ululyklary boýunça deň. Onda $\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}^{ayl} = \vec{0}$.

Tizlenmesi berlen pursatda nola deň bolan nokadyň bardygy görkezildi.

Kesgitleme. Berlen pursatda tizlenmesi nola deň bolan nokada **tizlenmeleriň pursatdaky merkezi** diýilýär.

Eger, polýus hökmünde tizlenmeleriň pursatdaky merkezini kabul etsek, onda (20.8), (20.9) formulalardan alarys:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BQ}^{ayl}$$

ýa-da

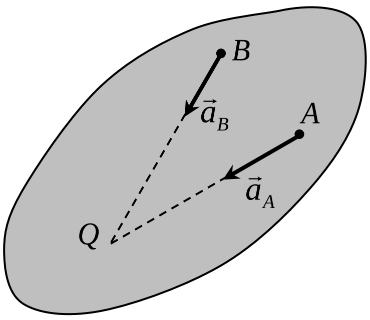
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BQ}^{n} + \vec{a}_{BQ}^{\tau} \tag{20.15}$$

Bu ýerden,

$$a_B = BQ\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \tag{20.16}$$

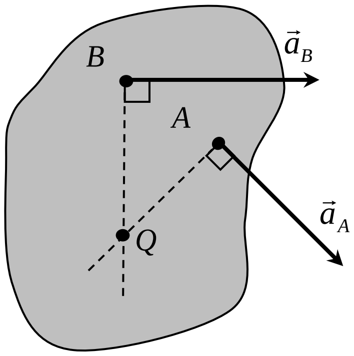
20.9. Käbir hususy halatlar.

a) Goý, $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$ bolsun. Onda, $\mu = 0$. Bu ýagdaýda tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlenmeleri bir nokada, ýagny tizlenmeleriň pursatdaky merkezine ugrukdyrylan.



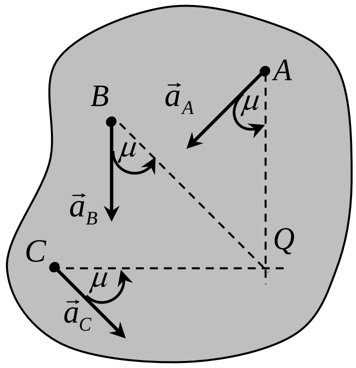
20.21-nji surat

b) Goý, $\varepsilon \neq 0$, $\omega = 0$ bolsun. Onda, $tg\mu = \infty \Rightarrow \mu = 90^0$. Bu ýagdaýda tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlenmelerine geçirilen perpendikulýarlar tizlenmeleriň pursatdaky merkezinde kesişýärler.



20.22-nji surat

Bellik. Tekiz figuranyň nokatlarynyň tizlenmeleri bu nokatlardan tizlenmeleriň pursatdaky merkezine çenli uzaklyklara göni proporsionaldyrlar.



20.23-nji surat

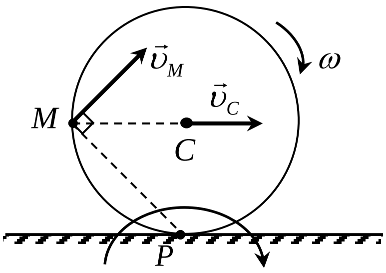
$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \ldots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (20.17)$$

Bir mysala seredeliň.

Mysal. Radiusy $R = 0{,}5\,m$ bolan tigir gönüçyzykly ýolda typman hereket edýär. Merkeziniň tizligi $\upsilon_C = 1\dfrac{m}{sek}$, tizlenmesi $a_C = -0{,}5\dfrac{m}{sek^2}$.

M nokadyň tizligini, tizlenmesini we *P* nokadyň tizlenmesini tapmaly.

Çözülişi.



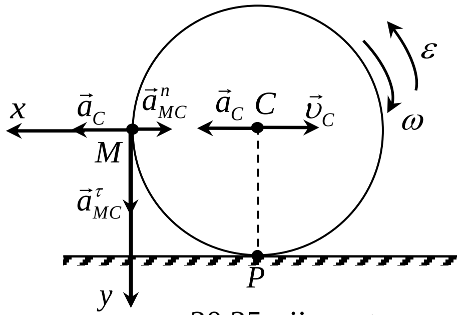
20.24-nji surat

P-tigirde tizlikleriň pursatdaky merkezi.

$$\upsilon_C = \omega \cdot CP \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_C}{CP} = \frac{\upsilon_C}{R} \Rightarrow \omega = 2\frac{1}{sek}$$

Onda

$$\upsilon_M = \omega \cdot MP = \omega \cdot \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow \upsilon_M = \sqrt{2}\,\frac{m}{sek}$$



20.25-nji surat

Tigiriň burç tizlenmesini tapalyň:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\dot{\upsilon}_C}{R} = \frac{a_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -1\frac{1}{sek^2}$$

Tizlenmeleriň paýlanyşy boýunça:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{MC} + \vec{a}^\tau_{MC}. \qquad (*)$$

Bu ýerde

$$a^n_{MC} = \omega^2 \cdot MC = \omega^2 \cdot R = 2\frac{m}{sek^2},$$

$$a^\tau_{MC} = |\varepsilon| \cdot MC = |\varepsilon| \cdot R = 0{,}5\frac{m}{sek^2}.$$

(*) deňligi x, y oklaryna proýektirläp taparys:

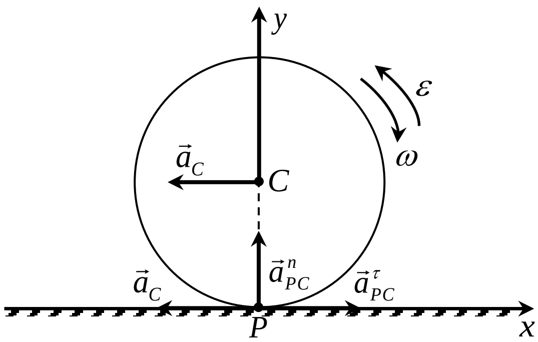
$$a_{Mx} = a_C - a^n_{MC} = 0{,}5 - 2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{m}{sek^2}\right),$$

$$a_{My} = a^\tau_{MC} = 0{,}5\left(\frac{m}{sek^2}\right).$$

Onda

$$a_M = \sqrt{a^2_{Mx} + a^2_{My}} \approx 1{,}57\frac{m}{sek^2}$$

(20.10) formulany P nokat üçin ulanalyň.



20.26-njy surat

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{PC} + \vec{a}^\tau_{PC}, \qquad (**)$$

$$a^n_{PC} = \omega^2 \cdot PC = \omega^2 \cdot R = 2\frac{m}{sek^2},$$

$$a^\tau_{PC} = \varepsilon \cdot PC = \varepsilon \cdot R = 0{,}5\frac{m}{sek^2}.$$

(**) deňligi x, y oklaryna proýektirläp taparys:

$$a_x = a^\tau_{PC} - a_C = 0,$$

$$a_y = a_{PC}^n = 2\left(\frac{m}{sek^2}\right).$$

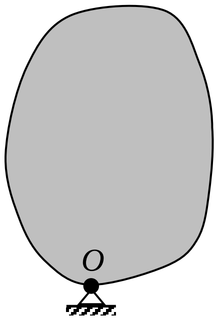
Onda $a_P = a_{PC}^n = 2\dfrac{m}{sek^2}$

§21. Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketi.

1. **Eýleriň burçlary. Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereket deňlemesi.**
2. **Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketine geometriýa nukdaý nazaryndan seretmek. Eýler-Dalamberiň teoremasy.**
3. **Sferik hereketdäki jisimiň nokadynyň tizligi.**
4. **Aksoidler.**
5. **Sferik hereketdäki jisimiň nokadynyň tizlenmesi.**

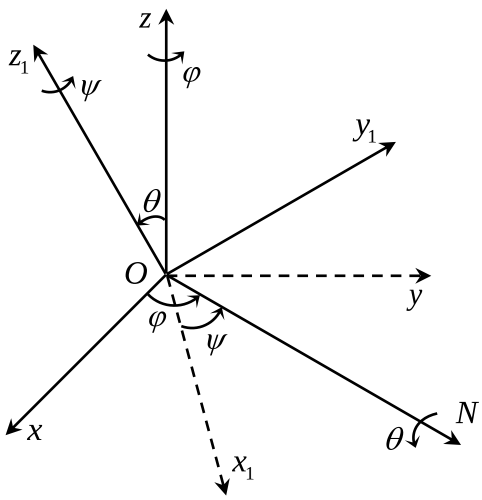
21.1. Eýleriň burçlary. Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereket deňlemesi.

Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketine seredeliň. Meselem, bir nokady sferik şarnirli berkidilen jisime garalyň.



21.1-nji surat

Bu hereketi öwrenmek ucin koordinatalar sistemalaryny girizeliň.
O-jisimiň gozganmaýan nokady.



21.2-nji surat

$Oxyz$ -gozganmaýan koordinatalar sistemasy;

$Ox_1y_1z_1$-jisim bilen bagly koordinatalar sistemasy;

xy we x_1y_1 tekizlikleriň kesişme göni çyzygyna **düwünler çyzygy** diýilýär. ON-düwünler çyzygy. Düwünler çyzygynda položitel ugur saýlap alalyň. Aşakda görkezilen burçlary girizeliň:

$\varphi - Ox$, ON oklaryň arasyndaky burç. Bu burç Ox okdan ON oka tarap položitel ugur boýunça, ýagny Oz okuň öňünden seredeniňde sagat diliniň hereketiniň tersine alnyp goýulýar.

$\psi - Ox_1$, ON oklaryň arasyndaky burç. Bu burç Ox_1 okdan ON oka tarap položitel ugur boýunça, ýagny Oz_1 okuň öňünden seredeniňde sagat diliniň hereketiniň tersine alnyp goýulýar.

$\theta - Oz$, Oz_1 oklaryň arasyndaky burç. Bu burç Oz okdan Oz_1 oka tarap položitel ugur boýunça, ýagny ON okuň öňünden seredeniňde sagat diliniň hereketiniň tersine alnyp goýulýar.

φ, ψ, θ-burçlara **Eýleriň burçlary** diýilýär we degişlilikde şeýle atlandyrylýarlar:

φ-hususy aýlanma burçy;

ψ -presessiýa burçy;

θ-nutasiýa burçy.

Elbetde, jisimiň hereket edýändigi sebäpli bu burçlar wagt boýunça üýtgeýärler. ýagny

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{21.1}$$

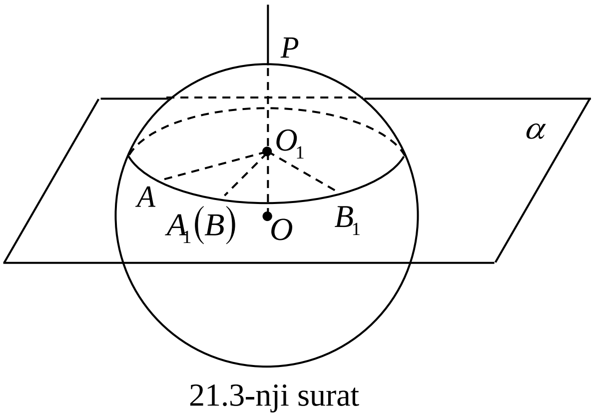
$\varphi(t), \psi(t), \theta(t)$-iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar. (21.1) deňleme gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereket deňlemesidir.

21.2. Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketine geometriýa nukdaý nazaryndan seretmek. Eýler-Dalamberiň teoremasy.

Gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň nokady merkezi gozganmaýan nokatda, radiusy nokady gozganmaýan nokat bilen birikdirýän kesimiň uzynlygyna deň bolan sfera boýunça hereket edýär. Şol sebäpli gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketine **sferik hereket** diýilýär.

Eýler-Dalamberiň teoremasy. Sferik hereketdäki jisimiň islendik orunüýtgetmesini gozganmaýan nokatdan geçýän käbir okuň daşyndan käbir burça öwürmek bilen amala aşyryp bolýar.

Subudy.

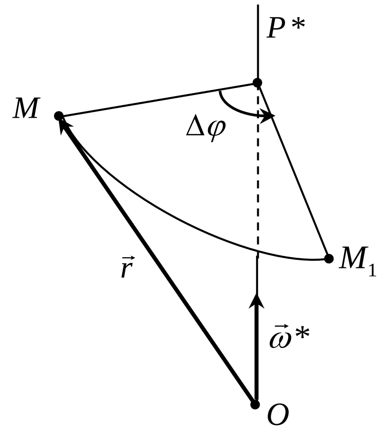


21.3-nji surat

Goý, jisim ornuny üýtgeden bolsun. Şeýlelikde, A nokat A_1 nokada, A_1 nokadyň ornundaky B nokat B_1 nokada geçen bolsun. A, A_1, B_1 nokatlar merkezi O nokatda bolan, OA radiusly sferada ýatýarlar. A, A_1, B_1 nokatlardan geçýän α tekizlik bu sferany töwerek boýunça kesýär. Bu töweregiň merkezini O_1 bilen belgiläliň. O_1O göni çyzyk α tekizlige perpendikulýar. O_1O göni çyzyk bilen sferanyň kesişýän nokadyny P bilen belgiläliň. $\overset{\cup}{AA_1} = \overset{\cup}{BB_1}$. Şeýlelik bilen, jisimiň orunüýtgemesini OP okuň daşyndan AO_1A_1 burça öwürmek bilen amala aşyryp bolýar.
Teorema subut edildi.

21.3. Sferik hereketdäki jisimiň nokadynyň tizligi. Pursatdaky aýlanma oky.

Goý, Δt wagtyň dowamynda jisimiň M nokady M_1 nokada geçen bolsun. Eýler-Dalamberiň teoremasy boýunça bu orunüýtgetme käbir $OP*$ okuň daşyndan käbir $\Delta\varphi$ burça öwürmek bilen amala aşyrylýar.



21.4-nji surat

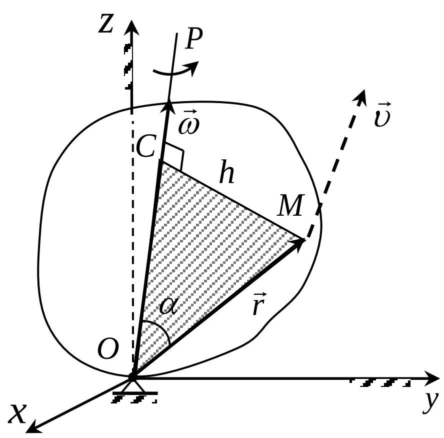
Kesgitleme. $\omega* = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ululyga jisimiň ortaça burç tizligi diýilýär.

$\vec{\omega}*$-ortaça burç tizliginiň wektory; bu wektor $OP*$ ok boýunça ugrukdyrylyp, onuň öňünden seredeniňde $\Delta\varphi$ burça öwürme sagat diliniň hereketiniň tersine bolup geçmeli.
Kesgitleme. Δt nola ymtylanda $OP*$ okuň predel halatyna **pursatdaky aýlanma oky** diýilýär.
Kesgitleme. Δt nola ymtylanda ortaça burç tizliginiň predeline jisimiň pursatdaky burç tizligi diýilýär, ýagny

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi} \qquad (21.2)$$

Elbetde, Δt nola ymtylanda $\vec{\omega}*$ wektor hem, OP okunda ýatýan $\vec{\omega}$ predel ýagdaýa eýe bolar. Bu wektoryň uzynlygy san taýdan pursatdaky burç tizligine deň, ýagny

$$|\vec{\omega}| = \omega \qquad (21.3)$$



21.5-nji surat

Jisim berlen pursatda pursatdaky aýlanma okunyň daşyndan aýlanýar. Jisimiň islendik M nokadynyň tizligi aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \tag{21.4}$$

$$\upsilon = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha\,, \quad \upsilon = \omega \cdot h\,, \tag{21.5}$$

bu ýerde

$\vec{r}$ -M nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory;

α - $\vec{r}\,,\vec{\omega}$ wektorlaryň arasyndaky burç;

h –M nokatdan pursatdaky aýlanma okuna çenli uzaklyk.

M nokadyň tizligi OP okuň we M nokadyň üstünden geçýän tekizlige perpendikulýar.

(21.4) formula sferik hereketdäki jisimiň nokatlarynyň tizlikleriniň paýlanyşyny görkezýär.

Eger $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, M nokadyň koordinatalary (x, y, z) bolsa, onda:

$$\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\omega_y z - \omega_z y\right) + \vec{j}\left(\omega_z x - \omega_x z\right) + \vec{k}\left(\omega_x y - \omega_y x\right) \tag{21.6}$$

Pursatdaky aýlanma okunyň nokatlarynyň koordinatalary aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrýar:

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z} \tag{21.7}$$

Bellik. Pursatdaky aýlanma okuna degişli nokatlaryň tizlikleri nola deň.

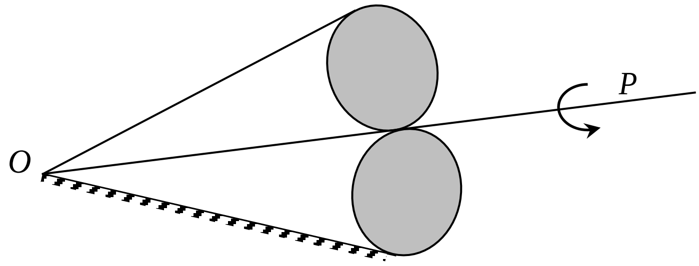
21.4. Aksoidler.

Kesgitleme. Pursatdaky aýlanma oklarynyň giňişlikdäki geometrik ornuna **gozganmaýan aksoid** diýilýär.

Kesgitleme. Pursatdaky aýlanma oklarynyň jisimdäki ornuna **hereketlenýän aksoid** diýilýär.

Bellik. Pursatdaky aýlanma oklarynyň gozganmaýan O nokatdan geçýändikleri sebäpli, aksoidleriň ikisi hem konus görnüşlidir.

Gozganmaýan we hereketlenýän aksoidler berlen pursatda pursatdaky aýlanma oky boýunça galtaşýarlar. Hereketlenýän aksoid gozganmaýan aksoidiň üstünde typman hereket edýär.



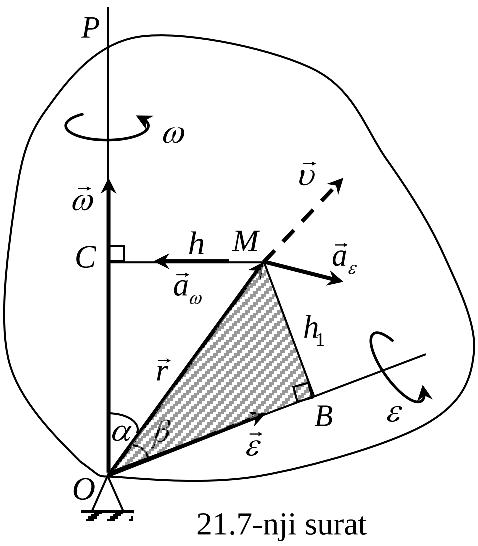
21.6-njy surat

21.5. Sferik hereketdäki jisimiň nokadynyň tizlenmesi.

Sferik hereketdäki jisimiň nokadynyň tizlenmesini tapmak üçin (21.4) deňligi differensirläliň:

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

$\vec{\varepsilon}$ -jisimiň burç tizlenmesi; umumy ýagdaýda, $\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}$ wektorlar bir okda ýatmaýarlar.



21.7-nji surat

Görşümiz ýaly, nokadyň tizlenmesi iki düzüjiden ybarat:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon} + \vec{a}_{\omega} \qquad (21.8)$$

Bu tizlenmeleri öwreneliň.

$$\vec{a}_{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad (21.9)$$

$\vec{a}_{\varepsilon}$ *-nokadyň aýlanma tizlenmesi*;

$$a_{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot h_1 \qquad (21.10)$$

$\beta - \vec{r}$ we $\vec{\varepsilon}$ wektorlaryň arasyndaky burç.

h_1-nokatdan burç tizlenmesiniň wektorynyň ýatýan okuna çenli uzaklyk. $\vec{a}_{\varepsilon}$-wektor $\vec{\varepsilon}$, $\vec{r}$ wektorlara perpendikulýar bolup, onuň öňünden seredeniňde $\vec{\varepsilon}$ wektordan $\vec{r}$ wektora ýakyn aýlaw sagat diliniň hereketiniň tersine bolup geçmeli.

$\vec{a}_{\omega}$*-nokadyň oka ymtylýan tizlenmesi*.

$$\vec{a}_{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (21.11)$$

$$a_{\omega} = \omega \cdot \omega \cdot r \sin\alpha = \omega^2 \cdot h \qquad (21.12)$$

$\alpha - \vec{r}$ we $\vec{\omega}$ wektorlaryň arasyndaky burç.

h –nokatdan pursatdaky aýlanma okuna çenli uzaklyk.

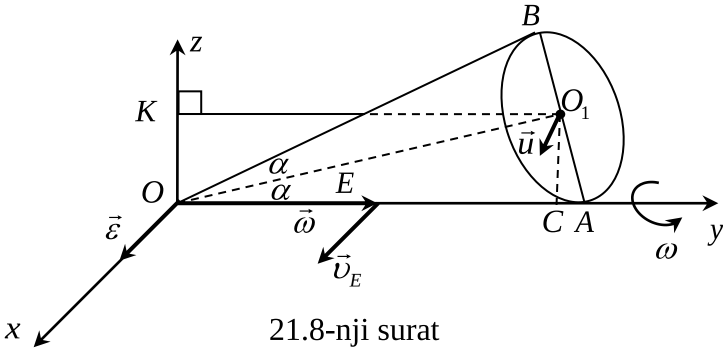
$\vec{a}_{\omega}$-pursatdaky aýlanma okuna tarap MC kesim boýunça ugrukdyrylan.

Eger $\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$, $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z)$, $\vec{\upsilon}=(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)$ bolsa, onda:

$$\vec{a}_\varepsilon=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z\\ x & y & z\end{vmatrix} \tag{21.13}$$

$$\vec{a}_\omega=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z\end{vmatrix} \tag{21.14}$$

Bellik. (21.8) formula sferik hereketdäki jisimiň nokatlarynyň **tizlenmeleriniň paýlanyşyny** görkezýär.
Bir mysala seredip geçeliň.
Mysal. Emelegetirijisi l bolan tegelek esasly konus gorizontal tekizlikde typman hereket edýär.
O-konusyň gozganmaýan nokady;
O_1-konusyň esasynyň merkezi; O_1 nokat gorizontal tekizlikde $u=const$ tizlik bilen hereket edýär.
A,*B* (diametral) nokatlaryň tizlenmelerini tapmaly. $\angle AOB=2\alpha$



21.8-nji surat

Oy okuny *OA* emelegetiriji boýunça ugrukdyryp, *Oxyz* koordinatalar sistemasyny girizeliň. Konusyň typman hereket edýänligi sebäpli *OA* göni çyzyk pursatdaky aýlanma oky bolup durýar. Bu oka degişli nokatlaryň tizlikleri berlen pursatda nola deň. O_1 nokatdan *OA* oka perpendikulýar O_1C kesimini geçireliň.
ω-konusyň burç tizligi. Onda $u=\omega\cdot O_1C$
Bu ýerden,

$$\omega=\frac{u}{O_1C} \tag{*}$$

$$O_1C=OO_1\cdot\sin\alpha=OA\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=l\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{l\cdot\sin2\alpha}{2}$$

O_1C-niň ululygyny (*) deňlikde ornuna goýup alarys:

$$\omega=\frac{2u}{l\cdot\sin2\alpha}=const$$

$\vec{\omega}$ wektor Oy oky boýunça ugrukdyrylan, bu wektoryň ujy bolan E nokat $|\vec{\omega}|$ radiusly töwerek boýunça hereket edýär. $\vec{\omega}$ wektory E nokadyň radius-wektory hökmünde kabul edeliň. Onda

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\upsilon}_E \ .$$

E nokadyň tizligini kesgitläliň.

$$u = \omega_{OCO_1K} \cdot OC$$

$O_1K - O_1$ nokatdan Oz oka inderilen perpendikulýar. Bu ýerden

$$\omega_{OCO_1K} = \frac{u}{OC} = \frac{u}{\frac{O_1C}{tg\alpha}} = \frac{u \cdot tg\alpha}{\frac{l \cdot \sin 2\alpha}{2}} = \frac{u}{l \cdot \cos^2 \alpha} \quad ,$$

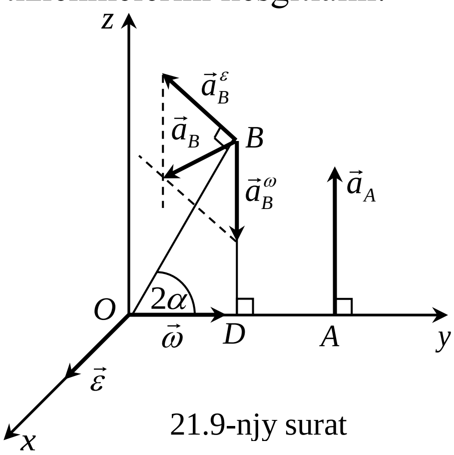
$$\upsilon_E = \omega_{OCO_1K} \cdot \omega = \frac{u}{l \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2u}{l \cdot \sin 2\alpha} = \frac{2u^2}{l^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha} \quad .$$

Şeýlelik bilen,

$$|\vec{\varepsilon}| = |\upsilon_E| = \frac{2u^2}{l^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$\vec{\varepsilon}$ wektor Ox oky boýunça ugrukdyrylan.

A we B nokatlaryň tizlenmelerini kesgitläliň:



21.9-njy surat

A nokat pursatdaky aýlanma okuna degişlidigi sebäpli, $a_A^{\omega} = 0$.

$\vec{a}_A^{\varepsilon}$ tizlenme XOY tekizligine perpendikulýar.

$$a_A^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot l = \frac{2u^2}{l \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\varepsilon} \ .$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\omega} + \vec{a}_B^{\varepsilon}$$

$$a_B^{\omega} = \omega^2 \cdot BD = \left(\frac{2u}{l \cdot \sin 2\alpha} \right)^2 \cdot l \cdot \sin 2\alpha = \frac{4u^2}{l \cdot \sin 2\alpha} \qquad (**)$$

$\vec{a}_B^{\omega}$ tizlenme Oy okuna inderilen perpendikulýar boýunça ugrukdyrylan.

$$a_B^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OB = \frac{2u^2}{l^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha} \cdot l = \frac{2u^2}{l \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha} \qquad (***)$$

$\vec{a}_B^{\varepsilon}$ tizlenme ZOY tekizlikde ýatýar we OB kesime perpendikulýar. (**) , (***) deňliklerden $a_B^{\omega}, a_B^{\varepsilon}$ ululyklary

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^{\omega}\right)^2 + \left(a_B^{\varepsilon}\right)^2 + 2 \cdot a_B^{\omega} \cdot a_B^{\varepsilon} \cdot \cos\left(180^0 - 2\alpha\right)}$$

deňlikde goýup, käbir ýönekeý özgertmelerden soň aşakdaky netijäni alarys:

$$a_B = \frac{2u^2 \cdot \cos^2 2\alpha}{l \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

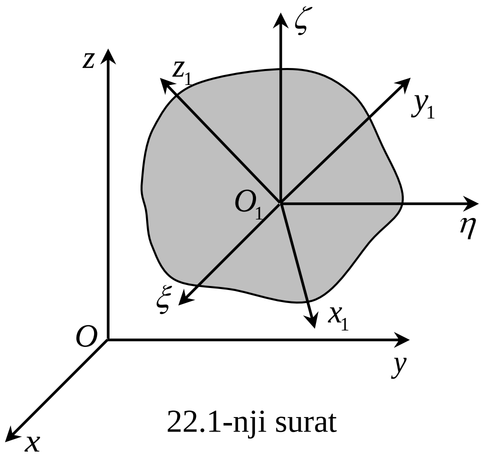
§22. Erkin gaty jisimiň hereketi.

1. **Erkin gaty jisimiň hereketiniň deňlemesi.**
2. **Erkin gaty jisimiň hereketiniň düzüjileri.**
3. **Erkin gaty jisimiň nokadynyň tizligi.**
4. **Erkin gaty jisimiň nokadynyň tizlenmesi.**

22.1. Erkin gaty jisimiň hereketiniň deňlemesi

Kesgitleme. Eger gaty jisim giňişlikde islendik ugur boýunça ornuny üýtgedip bilýän bolsa, onda bu jisime **erkin gaty jisim** diýilýär.

Erkin gaty jisimiň hereketini $Oxyz$ gozganmaýan koordinatalar sistemasyna görä öwreneliň. Gozganmaýan koordinatalar sistemasyndan başga, jisim bilen bagly $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyny we öňe bolan hereketdäki $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemalaryny girizeliň. O_1-jisimiň erkin saýlanan nokady (polýus).



22.1-nji surat

$$O_1\xi \,//\, Ox\ ,\ O_1\eta \,//\, Oy\ ,\ O_1\zeta \,//\, Oz$$

O_1 nokadyň giňişlikdäki ýerleşişi we $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynyň $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi belli bolsa, onda jisimiň giňişlikdäki orny doly kesgitlenýär. O_1 nokat $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ üç koordinata bilen kesgitlenýär. $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynyň $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi Eýleriň burçlary bilen kesgitlenýär. Şeýlelik bilen, erkin jisimiň giňişlikde ýerleşişi $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}, \varphi, \psi, \theta$ alty sany parametr bilen kesgitlenýar. Jisimiň hereket edýändigi sebäpli bu parametrler wagta görä üýtgeýärler:

$$\begin{cases} x_{O_1} = f_1(t) \\ y_{O_1} = f_2(t) \\ z_{O_1} = f_3(t) \\ \psi = \psi(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases} \tag{22.1}$$

$f_1, f_2, f_3, \psi, \varphi, \theta$-wagta bagly iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar. (22.1) deňlige **erkin gaty jisimiň hereket deňlemesi** diýilýär.

22.2. Erkin gaty jisimiň hereketiniň düzüjileri.

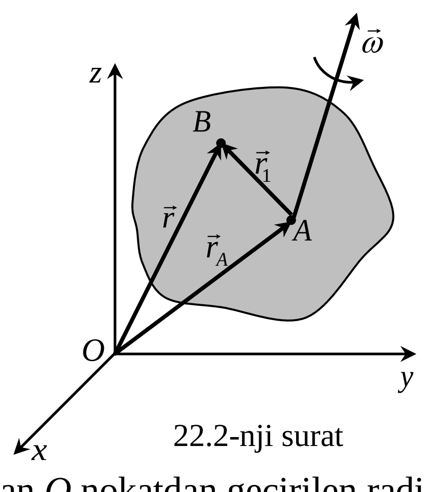
(22.1) deňlemäniň ilkinji üç deňlemesi O_1 nokadyň we $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasynyň öňe bolan hereketini (göçürme hereket) kesgitleýär; soňky üç deňlemesi jisimiň $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasyna görä (göralik hereket) hereketini kesgitleýär. O_1 nokat $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasynyň gozganmaýan nokadylygy sebäpli, jisimiň görälik hereketi-gozganmaýan bir nokady bolan jisimiň hereketidir (sferik hereket). Öňe bolan göçürme hereketiniň tizligi-O_1 nokadyň tizligi:

$$\begin{cases} \upsilon_{O_1x} = \dot{x}_{O_1} = f_1^{/}(t) \\ \upsilon_{O_1y} = \dot{y}_{O_1} = f_2^{/}(t) \\ \upsilon_{O_1z} = \dot{z}_{O_1} = f_3^{/}(t) \end{cases} \tag{22.2}$$

Netije. Erkin jisimiň hereketi iki hereketden düzülýär:
1) Tizligi saýlanyp alnan polýusyň tizligine deň öňe bolan hereket;
2) jisimiň polýusyň daşyndaky hereketi.
Bellik. Jisimiň görälik hereketi saýlanyp alnan polýusyň daşyndaky hereket. Diýmek, islendik wagt pursatynda polýusdan geçýän ok tapylyp, jisim şu pursatda bu okuň daşyndan ω burç tizligi bilen aýlanýar.

22.3. Erkin gaty jisimiň nokadynyň tizligi.

Erkin jisimiň *A* nokadyny polýus hökmünde kabul edeliň: *B*-jisimiň käbir nokady



22.2-nji surat

$\vec{r}$ -*B* nokadyň gozganmaýan *O* nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_A$-*A* nokadyň gozganmaýan *O* nokatdan geçirilen radius-wektory;

$\vec{r}_1$-*B* nokadyň *A* nokatdan geçirilen radius-wektory;

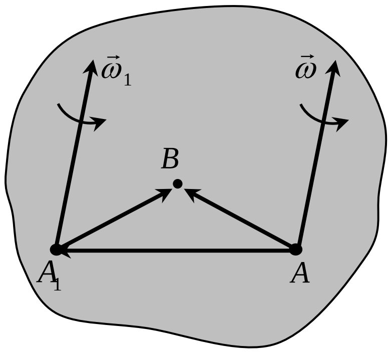
Jisimiň *B* nokadynyň tizligi iki tizlikden düzülýar: *A* nokadyň tizligi, *A* nokadyň daşyndan aýlanma hereketdäki tizligi:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{BA} \qquad (22.3)$$

ýa-da

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad (22.4)$$

(22.4) deňlik erkin jisimiň nokatlarynyň **tizlikleriniň paýlanyşyny** görkezýär. $\vec{\omega}$ wektoryň saýlanyp alnan polýusa bagly däldigini görkezeliň: Polýus hökmünde *A* nokatdan başga A_1 nokady alalyň.



22.3-nji surat

$\vec{\omega}_1$-jisimiň A_1 nokadyň daşyndan aýlanma hereketdäki burç tizligi. $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ deňligi subut etmeli. (22.4) formuladan alarys:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{A_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1B} \qquad (22.5)$$

(22.4) we (22.5) deňliklerden alarys:

$$\vec{\upsilon}_{A_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad (22.6)$$

A_1 nokadyň tizligini hem (22.4) formuladan *A* nokadyň tizliginiň üsti bilen aňladalyň:

$$\vec{\upsilon}_{A_1} = \vec{\upsilon}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AA_1}$$

$\vec{\upsilon}_{A_1}$-i (22.6) deňlikde ornuna goýup alarys:

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{AA_1} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

ýa-da

$$\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{\omega} \times \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}\right)$$

22.3-nji suratdan görnüşi ýaly,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1B}$$

Onda

$$\vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{A_1B},$$

$$\left(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}\right) \times \overrightarrow{A_1B} = \vec{0}.$$

Alnan deňlik islendik *B* nokat üçin ýerine ýetmeli. Diýmek, $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega} = \vec{0}$ bolmaly. Bu ýerden: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$

22.4. Erkin gaty jisimiň nokadynyň tizlenmesi.

B nokadyň tizlenmesini kesgitlemek üçin (22.4) deňligi differensirläliň:

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\upsilon}}_B = \dot{\vec{\upsilon}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \dot{\overrightarrow{AB}} \qquad (22.7)$$

$\dot{\vec{\omega}}$-gaty jisimiň A nokadyň daşynda görälik hereketiniň burç tizlenmesi.

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$$

$\dot{\vec{\upsilon}}_A$-A nokadyň tizlenmesi.

$$\dot{\vec{\upsilon}}_A = \vec{a}_A$$

$\dot{\overrightarrow{AB}}$-$B$ nokadyň A nokatdan geçýän pursatdaky aýlanma okunyň daşyndan aýlanma hereketindäki tizligi, ýagny

$$\dot{\overrightarrow{AB}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

Onda (22.7) deňlikden alarys:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) \qquad (22.8)$$

Şeýlelik bilen, erkin gaty jisimiň islendik nokadynyň tizlenmesi iki tizlenmeden ybarat:

1. Saýlanyp alnan polýusyň tizlenmesi;

2. polýusyň daşyndan aýlanma tizlenmesi.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon} + \vec{a}_{BA}^{\omega} \ , \qquad (22.9)$$

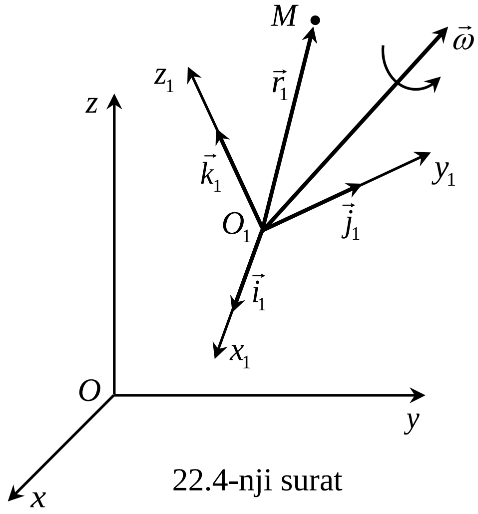
bu ýerde

$$\vec{a}_{BA}^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} \ , \ \vec{a}_{BA}^{\omega} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right)$$

Bellik. (22.9) deňlik erkin gaty jisimiň nokatlarynyň **tizlenmeleriniň paýlanyşyny** görkezýär**.**

Belli bolşy ýaly, erkin jisimiň islendik M nokadynyň jisimiň görälik hereketindäki tizligi aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_1M} \qquad (22.10)$$



22.4-nji surat

Bu ýerde

O_1-polýus; r_1-M nokadyň O_1 nokatdan geçirilen radius-wektory;

$\vec{\omega}$-jisimiň polýusdan geçýän pursatdaky aýlanma okunyň daşyndan aýlanma burç tizligi.

(22.10) deňlikde $\vec{r}_1$ wektoryň ýerine $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ortlary goýup taparys:

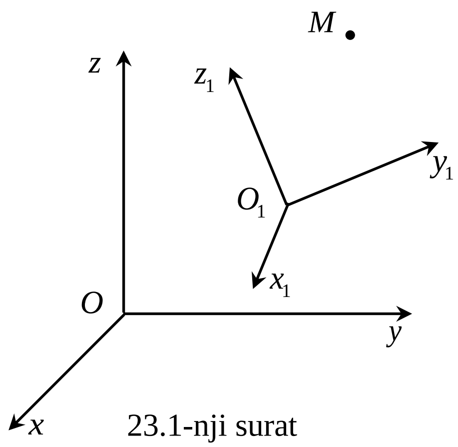
$$\dot{\vec{i}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \ , \ \dot{\vec{j}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \ , \ \dot{\vec{k}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \qquad (22.11)$$

8-nji BAP
Çylşyrymly hereket.
§23. Nokadyň çylşyrymly hereketi.

1. **Nokadyň çylşyrymly hereketi. Esasy düşünjeler.**
2. **Tizlikleriň goşulyşy. Tizlikleriň goşulyşy baradaky teorema.**
3. **Tizlenmeleriň goşulyşy (Koriolisiň teoremasy).**
4. **Koriolis tizlenmesiniň ululygy we ugry. Hususy halatlar.**

23.1. Nokadyň çylşyrymly hereketi. Esasy düşünjeler.

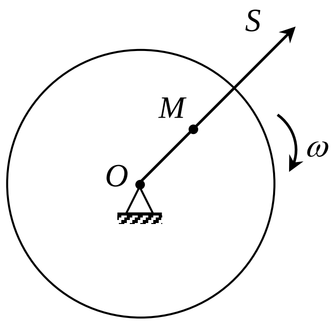
Goý, nokat $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereket edip, bu koordinatalar sistemasy gozganmaýan $Oxyz$ koordinatalar sitemasyna görä hereket edýän bolsun.



23.1-nji surat

Kesgitleme. Nokadyň $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereketine nokadyň **görälik hereketi** diýilýär; $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynyň hereketine **göçürme hereket** diýilýär; nokadyň $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä hereketine nokadyň **absolýut hereketi** ýa-da **çylşyrymly hereketi** diýilýär.

Meselem, merkeziniň daşynda aýlanýan diskiň radiusy boýunça hereket edýän nokadyň hereketi çylşyrymly hereketdir.



23.2-nji surat

Kesgitleme. Nokadyň görälik hereketindäki tizligine, tizlenmesine degişlilikde nokadyň **görälik tizligi, görälik tizlenmesi** diýilýär.

Olar degişlilikde aşakdaky ýaly belgilenýär:

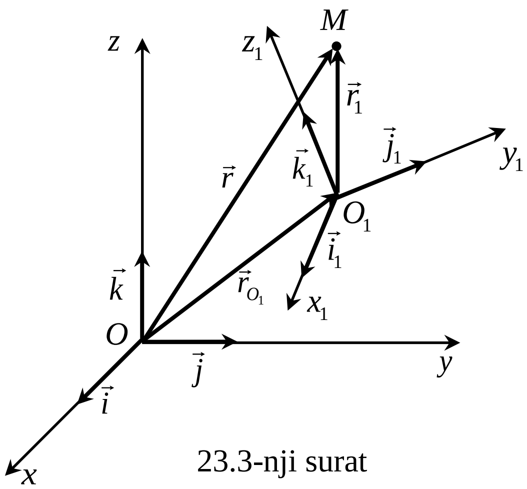
$\vec{\upsilon}_r$ – nokadyň görälik tizligi;

$\vec{a}_r$ – nokadyň görälik tizlenmesi.

Kesgitleme. Nokadyň hereketlenýän $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasynda şu pursatda eýeleýän ornunyň tizligine, tizlenmesine degişlilikde nokadyň **göçürme tizligi, göçürme tizlenmesi** diýilýär.
Olar degişlilikde aşakdaky ýaly belgilenýär:
$\vec{\upsilon}_e$ – nokadyň göçürme tizligi;
$\vec{a}_e$ – nokadyň göçürme tizlenmesi.
Kesgitleme. Nokadyň gozganmaýan $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä tizligine, tizlenmesine degişlilikde nokadyň **absolýut tizligi, absolýut tizlenmesi** diýilýär.
Olary belgilemek üçin adaty belgilemeler ulanylýar:
$\vec{\upsilon}$ – nokadyň absolýut tizligi;
$\vec{a}$ – nokadyň absolýut tizlenmesi.

23.2. Tizlikleriň goşulyşy. Tizlikleriň goşulyşy baradaky teorema.

Çylşyrymly hereketdäki M nokada seredeliň.



23.3-nji surat

$\vec{r}$ – M nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_1$ – M nokadyň O_1 nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_{O_1}$ – O_1 nokadyň O nokatdan geçirilen radius-wektory.
Görnüşi ýaly,

$$\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{r}_1 \tag{23.1}$$

$$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{k}_1$$

Nokadyň tizligini tapmak üçin (23.1) deňligi differensirläliň:

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{O_1} + x_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + y_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + z_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1 + \dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k} \tag{23.2}$$

Alnan deňlikde soňky üç goşulyjy nokadyň görälik tizligini berýär. Nokadyň göçürme tizligi-hereketlenýän koordinatalar sistemasyna görä gozganmaýan nokadyň tizligi, ýagny

$$x_1 = const\ ,\ y_1 = const\ ,\ z_1 = const$$

Onda (23.1) deňlikden alarys:

$$\vec{\upsilon}_e = \dot{\vec{r}}_{O_1} + x_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + y_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + z_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1$$

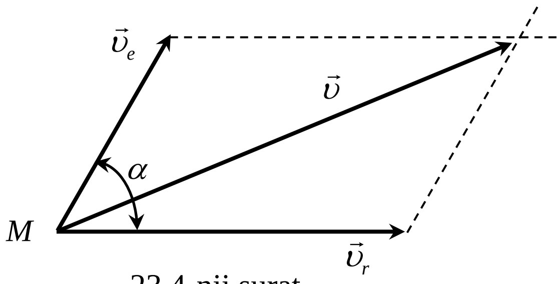
Şeýlelikde, (23.2) deňlikden taparys:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r$$

Alnan deňligi teorema hökmünde tassyklalyň.

Teorema (tizlikleriň goşulyşy). Nokadyň absolýut tizligi onuň göçürme we göräli tizlikleriniň wektorlaýyn jemine deň, ýagny

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r \tag{23.3}$$



23.4-nji surat

Tizligiň ululygy:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 + 2\upsilon_e \upsilon_r \cos\alpha} \tag{23.4}$$

bu ýerde $\alpha = \left(\widehat{\vec{\upsilon}_e \vec{\upsilon}_r}\right)$

23.3. Tizlenmeleriň goşulyşy (Koriolisiň teoremasy).

Nokadyň tizlenmesini tapmak üçin (23.3) deňligi differensirläliň:

$$\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}} = \dot{\vec{\upsilon}}_e + \dot{\vec{\upsilon}}_r \tag{23.5}$$

(23.5) deňligiň sag bölegindäki goşulyjylary aýratynlykda öwreneliň.

$$\dot{\vec{\upsilon}}_e = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}_{O_1} + x_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + y_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + z_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1\right] = \ddot{\vec{r}}_{O_1} + x_1 \cdot \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \cdot \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \cdot \ddot{\vec{k}}_1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1 =$$

$$= \vec{a}_e + \dot{x}_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\vec{i}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \dot{\vec{j}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \dot{\vec{k}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \end{bmatrix} = \vec{a}_e + \dot{x}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{i}_1\right) + \dot{y}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{j}_1\right) + \dot{z}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{k}_1\right) =$$

$$= \vec{a}_e + \vec{\omega} \times \left(\dot{x}_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1\right) = \vec{a}_e + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r$$

Diýmek,

$$\dot{\vec{\upsilon}}_e = \vec{a}_e + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r \quad , \tag{23.6}$$

$$\dot{\vec{\upsilon}}_r = \frac{d}{dt}\left[\dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1\right] = \ddot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \ddot{z}_1 \cdot \vec{k}_1 + \dot{x}_1 \cdot \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \cdot \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \cdot \dot{\vec{k}}_1 =$$

$$= \vec{a}_r + \dot{x}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{i}_1\right) + \dot{y}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{j}_1\right) + \dot{z}_1 \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{k}_1\right) =$$

$$= \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \left(\dot{x}_1 \cdot \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \cdot \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \cdot \vec{k}_1\right) = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r$$

Diýmek,

$$\dot{\vec{\upsilon}}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r \tag{23.7}$$

(23.6), (23.7) deňlikleri göz öňünde tutup, (23.5) deňlikden alarys:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_r\right) \tag{23.8}$$

(23.8) deňlikdäki $2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_r)$ goşulyja, bu düzüjini ilkinji görkezen fransuz alymy Gustaw Koriolisiň hatyrasyna **Koriolis tizlenmesi** diýilýär. Bu tizlenmäni $\vec{a}_k$ bilen belgiläliň:

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_r) \tag{23.9}$$

De Koriolis Gaspar Gustaw (1792-1843)

Fransuz alymy. Ylmy işleri dürli mehanizmleriň hereketlenýän böleklerini konstruirlemek bilen bagly. Şeýle-de, mehaniki iş we kinetik energiýa ýaly düşünjeleri ilkinji girizenleriň biri.

Alnan (23.8) deňligi teorema hökmünde tassyklalyň:

Koriolisiň teoremasy. Göçürme hereket öňe bolan hereket bolmadyk halatynda nokadyň tizlenmesi göçürme, görälik we Koriolis tizlenmeleriniň wektorlaýyn jemine deň, ýagny

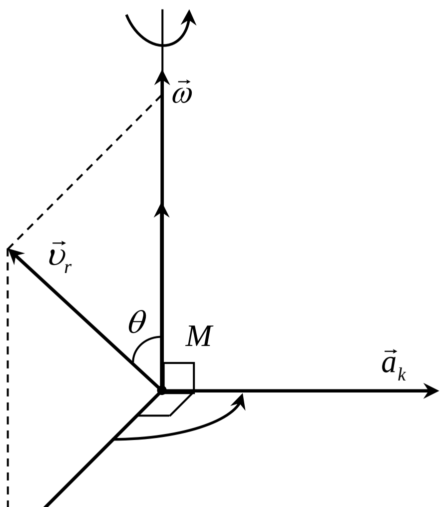
$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \tag{23.10}$$

23.4. Koriolis tizlenmesiniň ululygy we ugry.

Koriolis tizlenmesiniň ululygyny we ugruny (23.9) formuladan alarys. 23.5-nji suratda $\vec{\omega}$, $\vec{\upsilon}_r$ wektorlaryň arasyndaky burçy (180^0-dan kiçisini) θ bilen belgiläliň. Onda Koriolis tizlenmesiniň ululygy:

$$a_k = 2\omega\cdot\upsilon_r\cdot\sin\theta \tag{23.11}$$

Koriolis tizlenmesiniň ugruny kesgitlemek üçin $\vec{\omega}$ wektory hereketi öwrenilýän M nokada parallel göçürmeli.



23.5-nji surat

$\vec{\upsilon}_r$ wektory $\vec{\omega}$ wektora perpendikulýar bolan tekizlige proýektirlemeli we alnan proýeksiýany $\vec{\omega}$ wektory saklaýan okuň daşyndan göçürme aýlanmasyna tarap 90^0-a öwürmeli. Alnan ugur Koriolis tizlenmesiniň ugruny görkezýär.

Hususy halatlara seredip geçeliň.

I. $\vec{\upsilon}_r \perp \vec{\omega}$, ýagny $\theta = 90^0$. Bu ýagdaýda $\sin\theta = 1$, onda $a_k = 2\omega \cdot \upsilon_r$;

II. $\vec{\upsilon}_r \,//\, \vec{\omega}$, ýagny $\theta = 0^0, 180^0$. Bu ýagdaýda $\sin\theta = 0$, onda $a_k = 0$.

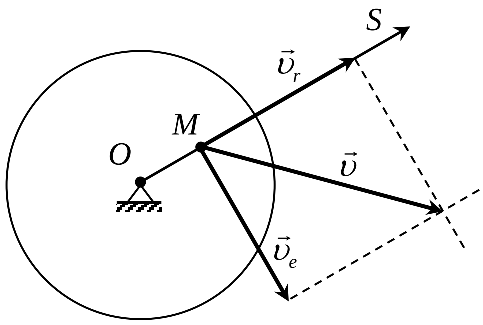
Göçürme hereketi öňe bolan hereket bolanda nokadyň tizlenmesi göçürme we göräl ik tizlenmeleriň wektorlaýyn jemine deňdir:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r \tag{23.12}$$

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. Disk, merkezinden geçýän, diskiň tekizligine perpendikulýar okuň daşyndan $\varphi = \pi t^2 (rad)$ deňlemä laýyklykda aýlanýar. Diskiň radiusy boýunça M nokat $S = OM = t^3 (sm)$ deňlemä laýyklykda hereket edýär. $t = 1$sek wagt pursatynda M nokadyň tizligini kesgitlemeli.

Çözülişi.



23.6-njy surat

Nokadyň hereketi çylşyrymly hereket.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r$$

$$\upsilon_e = \omega \cdot OM \quad , \quad \omega = \dot{\varphi} = 2\pi t$$

$$\omega\big|_{t=1} = 2\pi \frac{1}{sek} \; , \; OM = S(1) = 1sm$$

Onda $\upsilon_e = 2\pi \frac{1}{sek} \cdot 1sm = 2\pi \frac{sm}{sek}$. $\vec{\upsilon}_e$ tizlik OM kesime perpendikulýar, diskiň aýlanýan tarapyna ugrukdyrylan.

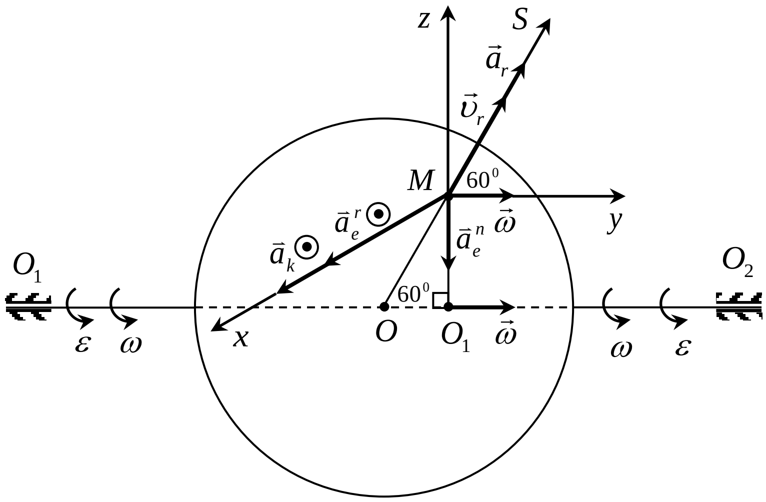
$$\upsilon_r = \dot{S} = 3t^2 \quad , \quad \upsilon_r \big|_{t=1sek} = 3\frac{sm}{sek}$$

$\vec{\upsilon}_r$ tizlik S ok boýunça ugrukdyrylan. M nokadyň tizliginiň ugruny tapmak üçin $\vec{\upsilon}_e, \vec{\upsilon}_r$ tizlikleriň üstünde gönüburçluk gurmaly. M nokadyň tizligi gönüburçlugyň diagonaly boýunça ugrukdyrylan.

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + 3^2}\,\frac{sm}{sek} \approx 6{,}96\frac{sm}{sek}$$

Mysal. Disk diagonalynyň daşyndan $\omega = 2t\left(\frac{rad}{sek}\right)$ deňlemä laýyklykda aýlanýar. Diskiň radiusy boýunça M nokat $S = OM = 4t^2\,(sm)$ deňleme boýunça hereket edýär. $t = 1sek$ wagt pursatynda M nokadyň tizlenmesini tapmaly.

Çözülişi.



23.7-nji surat

Göçürme hereketi (diskiň okuň daşynda aýlanmasy) öňe bolan hereket däl. Diýmek,

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

ýa-da

$$\vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_k \qquad (*)$$

Nokadyň tizlenmesi dört düzüjiden durýar. Bu düzüjileri tapalyň:

$$a_e^n = \omega^2 \cdot O_1M \quad , \quad \omega\big|_{t=1sek} = 2\frac{1}{sek} \ ,$$

$$O_1M = OM \cdot \sin 60^0 = S(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,sm \,,$$

$$a_e^n = \left(2\frac{1}{sek}\right)^2 \cdot 2\sqrt{3}\,sm = 8\sqrt{3}\frac{sm}{sek^2} \ .$$

$\vec{a}_e^n$ wektor O_1 nokada tarap ugrukdyrylan.

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot O_1M \quad , \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2\frac{1}{sek^2}$$

$$a_e^\tau = 2\frac{1}{sek^2}\cdot 2\sqrt{3}sm = 4\sqrt{3}\frac{sm}{sek^2}$$

$\vec{a}_e^\tau$ wektor çyzgynyň tekizligine perpendikulýar bolup, okyja tarap ugrukdyrylan.

$$\upsilon_r = \dot{S} = 8t \ , \ \upsilon_r\big|_{t=1sek} = 8\frac{sm}{sek}$$

$\vec{\upsilon}_r$ wektor S oky boýunça položitel ugra tarap ugrukdyrylan.

$$a_r = \dot{\upsilon}_r = 8\frac{sm}{sek^2}$$

$\vec{a}_r$ wektor S oky boýunça položitel ugra tarap ugrukdyrylan. Burç tizliginiň $\vec{\omega}$ wektory O_1O_2 göçürme aýlanma oky boýunça ugrukdyrylan we onuň öňünden seredeniňde göçürme aýlanmasy sagat diliniň hereketiniň tersine bolup geçmeli. $\vec{\omega}$ wektory M nokada parallel göçüreliň.

$$a_k = 2\cdot\omega\cdot\upsilon_r\cdot\sin 60^0 = 2\cdot 2\frac{1}{sek}\cdot 8\frac{sm}{sek}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\frac{sm}{sek^2}$$

$\vec{a}_k$ tizlenmäniň ugruny ýokarda getirilen düzgün boýunça taparys.

Nokadyň tizlenmesiniň ululygyny tapmak üçin $Mxyz$ koordinatalar sistemasyny girizeliň.
(*) deňligi koordinata oklaryna proýektirläp taparys:

$$a_x = a_k + a_e^\tau = 20\sqrt{3}\left(\frac{sm}{sek^2}\right) ,$$

$$a_y = a_r\cdot\cos 60^0 = 4\left(\frac{sm}{sek^2}\right) ,$$

$$a_z = a_r\cdot\cos 30^0 - a_e^n = -4\sqrt{3}\left(\frac{sm}{sek^2}\right) .$$

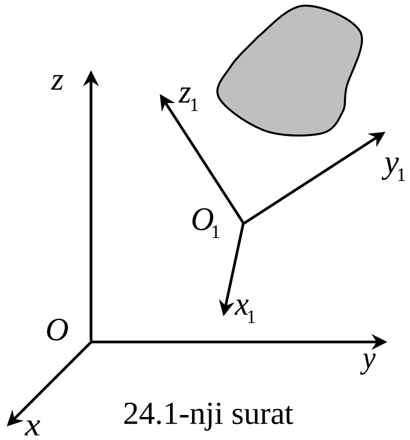
Onda

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(20\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2}\,\frac{sm}{sek^2} \approx 35{,}55\frac{sm}{sek^2}$$

§24. Gaty jisimiň çylşyrymly hereketi.

1. **Öňe bolan hereketleriň goşulyşy.**
2. **Öňe bolan we aýlanma hereketleriniň goşulyşy. Hususy ýagdaýlar.**
3. **Parallel oklaryň daşynda bolup geçýän aýlanma hereketleriniň goşulyşy. Hususy ýagdaýlar.**
4. **Kesişýän oklaryň daşynda bolup geçýän aýlanma hereketleriniň goşulyşy.**

Gaty jisimiň çylşyrymly hereketi düşünjesini girizeliň.
Kesgitleme. Eger jisim $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereket edip (göräli hereket), bu koordinatalar sistemasy gozganmaýan $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä hereket edýän bolsa (göçürme hereket), onda jisimiň hereketine **çylşyrymly hereket** diýilýär.



24.1-nji surat

Dürli hereketleriň goşulyşyna seredip geçeliň.

24.1. Öňe bolan hereketleriň goşulyşy.

Goý, jisim $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä $\vec{\upsilon}_1$ tizlikli öňe bolan hereket edip, bu koordinatalar sistemasy hem $Oxyz$ koordinatalar sistemasyna görä $\vec{\upsilon}_2$ tizlikli öňe bolan hereket edýän bolsun. *M*–jisimiň erkin nokady. §15-de getirilen, tizlikleriň goşulyşy hakyndaky teorema boýunça *M* nokadyň tizligi:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e \qquad (24.1)$$

Görälik we göçürme hereketleriniň öňe bolan hereketdigi sebäpli:

$$\vec{\upsilon}_r = \vec{\upsilon}_1 \quad , \quad \vec{\upsilon}_e = \vec{\upsilon}_2$$

Onda (24.1) deňlikden alarys:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 \qquad (24.2)$$

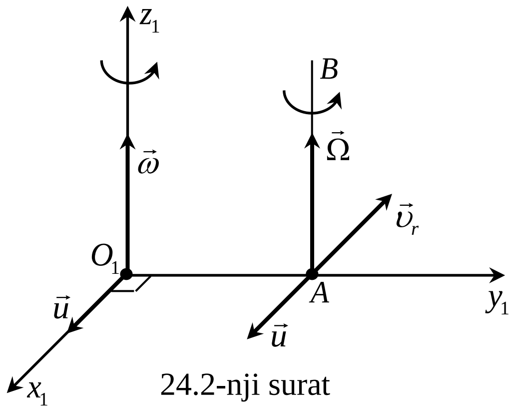
Netije. Öňe bolan hereketler goşulanda, netijede tizligi goşulýan öňe bolan hereketleriň tizlikleriniň wektorlaýyn jemine deň bolan öňe bolan hereket alynýar.

24.2. Öňe bolan we aýlanma hereketleriniň goşulyşy. Hususy ýagdaýlar.

Bu hereketleriň goşulyşyny öwrenmek üçin birnäçe hususy ýagdaýlara seredip geçeliň.

a) Öňe bolan hereketiň tizligi aýlanma okuna perpendikulýar.

Goý, jisimiň $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasyna görä hereketi z_1 okuň daşyndan ω burç tizlikli aýlanma hereket bolup, $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasy $\vec{\omega}$ wektora perpendikulýar $\vec{u}$ tizlikli öňe bolan hereket edýän bolsun.



24.2-nji surat

$\vec{u}$ wektor O_1x_1 ok boýunça ugrukdyrylan. O_1y_1 okuň üstünde ýerleşýän islendik *A* nokadyň tizligi $\vec{u}$ göçürme we $\vec{\upsilon}_r$ görälik tizlikleriniň wektorlaýyn jemine deň. Eger *A* nokady $O_1A \cdot \omega = u$ şert ýerine ýeter ýaly, ýagny $O_1A = \dfrac{u}{\omega}$ bolar ýaly saýlap alsak, onda *A* nokadyň tizligi nola deň bolar. Elbetde, bu netije O_1 nokadyň z_1 okunyň üstünde saýlanyp alnyşyna bagly däl. Diýmek, O_1z_1 okuna parallel *AB* göni çyzygyň ähli nokatlarynyň tizlikleri nola deň. Bu ýerden, jisimiň absolýut hereketinde *AB* göni çyzygyň pursatdaky aýlanma okydygy gelip çykýar. Bu aýlanmanyň Ω burç tizligini kesgitläliň. O_1 nokadyň tizligi $\vec{u}$ deň. Emma jisimiň *AB* göni çyzygyň daşyndan aýlanma hereketinde O_1 nokadyň tizligi $\Omega \cdot O_1A$ deň. Bu ýerden,

$$\Omega \cdot O_1A = u \ ,$$

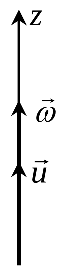
$$\Omega = \frac{u}{O_1A} = \frac{u}{\frac{u}{\omega}} = \omega \ . \qquad (24.3)$$

Netije. ω burç tizlikli aýlanma hereket we aýlanma hereketiniň burç tizligine perpendikulýar $\vec{u}$ tizlikli öňe bolan hereket goşulanda, islendik wagt pursatynda aýlanma okuna parallel bolan pursatdaky aýlanma oky tapylyp, jisim şu pursatda bu okuň daşyndan aýlanýar. Şeýlelikde, pursatdaky aýlanma oky göralik aýlanma hereketiniň aýlanma okundan $\frac{u}{\omega}$ daşlykda bolup, netijeleýji Ω burç tizlik ω göralik burç tizligine deň.

b) Jisimiň hyrly hereketi.

Goý, jisim gozganmaýan z okunyň daşyndan ω burç tizlikli aýlanyp (göralik hereket), bu ok boýunça $\vec{u}$ tizlikli öňe bolan hereket edýän bolsun (göçürme hereket). $\vec{\omega}, \vec{u}$ wektorlar z oky boýunça ugrukdyrylan. Jisimiň şeýle hereketine **hyrly hereket** diýilýär.

Eger $\vec{\omega}, \vec{u}$ wektorlar ugurdaş bolsa, onda hyrly herekete **sag hyr**, garşylykly ugrukdyrylan bolsa **çep hyr** diýilýär.



24.3-nji surat

Kesgitleme. $p = \frac{u}{\omega}$ ululyga hyrly hereketiň parametri ýa-da kinematiki hyryň parametri diýilýär.

Jisimiň z okuň daşyndan aýlanma burçuny φ bilen, öňe bolan hereketdäki geçen ýoluny S bilen belgiläp alarys:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \ , \ u = \frac{dS}{dt} \qquad (24.4)$$

Bu ýerden

$$\frac{dS}{d\varphi} = p \qquad (24.5)$$

Goý, p parametr hemişelik bolsun. Onda, $dS = p \cdot d\varphi$ deňligi integrirläp alarys:

$$S = p \cdot \varphi \ , \qquad (24.6)$$

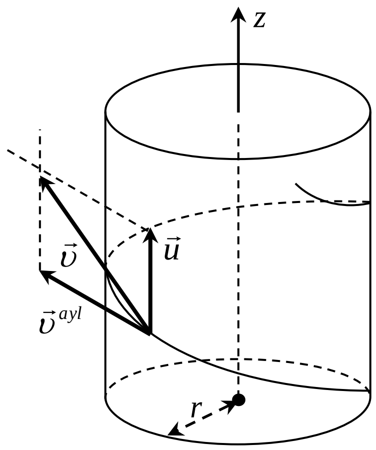
ýagny $p = const$ bolanda jisimiň öňe bolan hereketde geçen ýoly aýlanma burçuna göni proporsional.

(24.6) deňlikde $\varphi = 2\pi$ goýsak we bu aýlanma burçuna degişli z oky boýunça orunüýgetmäni h bilen belgiläp alarys:

$$h = p \cdot 2\pi \qquad (24.7)$$

h ululyga **hyryň ädimi** diýilýär.

z aýlanma okundan r aralykda ýerleşýän nokadyň traýektoriýasy radiusy r bolan tegelek silindriň üstünde ýerleşýär.



24.4-nji surat

Bu nokadyň tizligi iki düzüjiden durýar:

$\vec{\upsilon}^{ayl}$ -aýlanma hereketdäki tizligi

$$\upsilon^{ayl} = \omega \cdot r \ ,$$

$\vec{u}$ -öňe bolan hereketdäki tizligi.

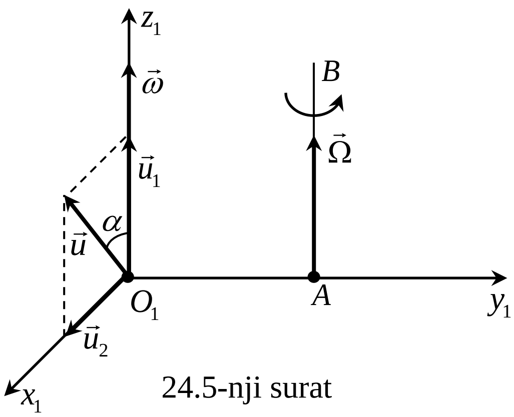
$\vec{\upsilon}^{ayl} \perp \vec{u}$ bolýandygy sebäpli, nokadyň absolýut tizligi:

$$\upsilon = \sqrt{u^2 + \omega^2 \cdot r^2} = \omega\sqrt{p^2 + r^2} \tag{24.8}$$

ç) Öňe bolan hereketiň tizligi aýlanma burç tizligine perpendikulýar däl.

$\vec{\omega} - z_1$ oky boýunça ugrukdyrylan, göräli aýlanma hereketiniň burç tizligi;

$\alpha -$ öňe bolan hereketiň (göçürme) tizligi $\vec{u}$ wektor bilen $\vec{\omega}$ wektoryň arasyndaky burç.



24.5-nji surat

$\vec{u}$ tizligi $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ düzüjilere dargadalyň:

$\vec{u}_1 - z_1$ oky boýunça ugrukdyrylan, $u_1 = u \cdot \cos\alpha$

$\vec{u}_2 - x_1$ oky boýunça ugrukdyrylan, $u_2 = u \cdot \sin\alpha$.

Seredilip geçilen (a) hususy ýagdaýa laýyklykda $\vec{u}_2$ tizlikli öňe bolan hereket we ω burç tizlikli aýlanma hereket, AB okuň daşyndan $\Omega = \omega$ burç tizlikli aýlanma herekete getirilýär. Şeýlelikde, $O_1A = \dfrac{u_2}{\omega} = \dfrac{u \cdot \sin\alpha}{\omega}$.

Şeýlelik bilen, $\vec{\Omega}$ burç tizlikli aýlanma hereketiň we $\vec{\Omega}$ wektora parallel $\vec{u}_1$ tizlikli öňe bolan hereketiň utgaşmagyna geldik, ýagny netijede

$$P=\frac{u_1}{\omega}=\frac{u\cdot\cos\alpha}{\omega}$$

parametrli kinematiki hyr alyndy.

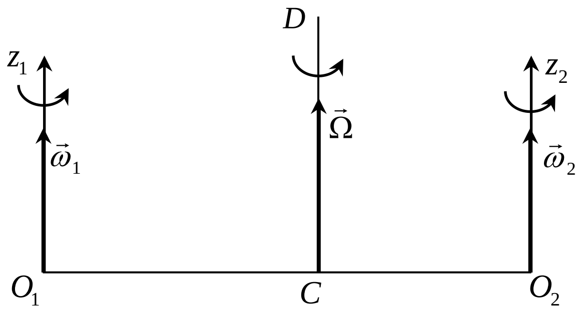
24.3. Parallel oklaryň daşynda bolup geçýän aýlanma hereketleriň goşulyşy. Hususy ýagdaýlar.

Goý, jisimiň görälik hereketi we hereketlenýän koordinatalar sistemasynyň göçürme hereketi parallel oklaryň daşynda bolup geçýän aýlanma herketler bolsun.

Jisim O_2z_2 okuň daşyndan ω_2 burç tizlik bilen aýlanyp (görälik hereket), ok hem özüne parallel bolan O_1z_1 okuň daşyndan ω_1 burç tizlik bilen aýlanýan (göçürme hereket) bolsun. Iki sany hususy halata seredip geçeliň.

a) Aýlanmalaryň ikisi hem bir tarapa ugrukdyrylan.

$\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2$ burç tizlikleriniň wektorlaryny şekillendireliň.

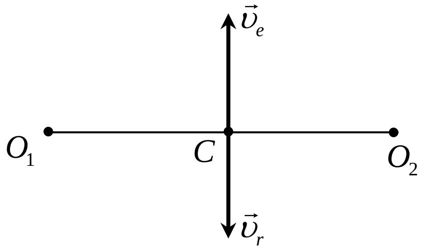


24.6-njy surat

O_1O_2 göni çyzykda jisimiň C nokadyny alalyň. Bu nokadyň tizligi iki düzüjiden durýar:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_r+\vec{\upsilon}_e \tag{24.9}$$

$\vec{\upsilon}_r$, $\vec{\upsilon}_e$ tizlikler garşylykly, ikisi hem O_1O_2 göni çyzyga perpendikulýar.



24.7-nji surat

(24.9) deňlikden:

$$\upsilon=\upsilon_e-\upsilon_r=\omega_1\cdot O_1C-\omega_2\cdot CO_2$$

C nokady $\omega_1\cdot O_1C=\omega_2\cdot CO_2$, ýagny

$$\frac{O_1C}{CO_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{24.10}$$

deňlik ýerine ýeter ýaly saýlalyň. Onda C nokadyň tizligi nola deň bolar. Şeýlelikde, CD göni çyzyga degişli islendik nokadyň tizligi nola deň, $CD\,//\,O_iz_i$, $i=1,2$. Diýmek, CD göni çyzyk jisim üçin pursatdaky aýlanma oky bolup durýar. Jisimiň Ω absolýut burç tizligini kesgitläliň.

O_2 nokadyň tizligi $\Omega \cdot CO_2$ ululyga deň, başga tarapdan bu nokadyň tizligi $\omega_1 \cdot O_1O_2$ ululyga deň. Onda $\Omega \cdot CO_2 = \omega_1 \cdot O_1O_2$ deňlikden alarys:

$$\Omega = \frac{\omega_1 \cdot O_1O_2}{CO_2} = \frac{\omega_1 \cdot (O_1C + CO_2)}{CO_2} = \frac{\omega_1 \cdot O_1C + \omega_1 \cdot CO_2}{CO_2} = [\omega_1 \cdot O_1C = \omega_2 \cdot CO_2] =$$

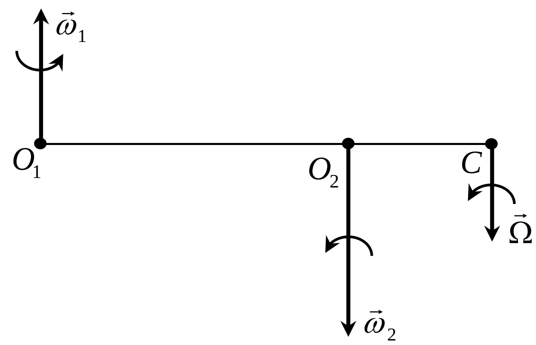
$$= \frac{\omega_2 \cdot CO_2 + \omega_1 \cdot CO_2}{CO_2} = \frac{(\omega_2 + \omega_1) \cdot CO_2}{CO_2} = \omega_2 + \omega_1$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad (24.11)$$

Netije. Iki sany parallel okuň daşynda bolup geçýän aýlanma hereketler goşulanda, islendik wagt pursatynda görälik we göçürme aýlanma oklaryna parallel bolan pursatdaky aýlanma oky tapylyp, jisim şu pursatda bu okuň daşyndan, görälik we göçürme aýlanmalaryň ugruna aýlanýar. Absolýut burç tizlik görälik we göçürme burç tizlikleriniň jemine deň. Pursatdaky aýlanma oky görälik we göçürme aýlanma oklarynyň arasyndaky uzaklygy içki usul bilen görälik we göçürme burç tizliklerine ters proporsional (24.10) gatnaşykda bölýär.

b) Aýlanmalar dürli taraplara ugrukdyrylan.

Goý, görälik we göçürme aýlanma hereketler dürli tarapa ugrukdyrylan bolsun. Kesgitlilik üçin $\omega_2 > \omega_1$ bolsun.



24.8-nji surat

Ýokarda getirilen amallara meňzeş amallardan soň aşakdaky netijäni alarys.

Netije. Iki sany parallel okuň daşynda bolup geçýän, dürli tarapa ugrukdyrylan aýlanma hereketler goşulanda, islendik wagt pursatynda pursatdaky aýlanma oky tapylyp, jisim şu pursatda bu okuň daşyndan, burç tizligi görälik we göçürme burç tizlikleriniň tapawudyna deň burç tizikli aýlanýar:

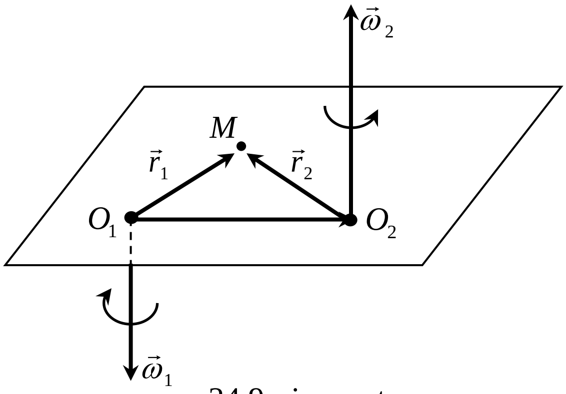
$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad (24.12)$$

Pursatdaky aýlanma oky görälik we göçürme aýlanma oklarynyň arasyndaky uzaklygy daşky usul bilen, görälik we göçürme burç tizliklerine ters proporsional gatnaşykda bolýar:

$$\frac{CO_1}{CO_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (24.13)$$

ç) Aýlanmalar jübüti.

Goý, görälik we göçürme aýlanma hereketler dürli tarapa ugrukdyrylyp, bu hereketlerdäki burç tizlikler deň bolsun, $\omega_1 = \omega_2$. Bu herekete **aýlanmalar jübüti** diýilýär.



24.9-njy surat

M – jisimiň erkin nokady;
$\vec{r}_1$–M nokadyň O_1 nokatdan geçirilen radius-wektory;
$\vec{r}_2$–M nokadyň O_2 nokatdan geçirilen radius-wektory;
M nokadyň tizligi iki düzüjiden durýar:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 \ , \ \vec{\upsilon}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

Onda

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \left[\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2\right] = -\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_2 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = -\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{\omega}_2 =$$

$$= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{\omega}_2 = \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{O_1O_2}\right] = \overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2 \ ,$$

$$\vec{\upsilon} = \overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2 \ . \qquad (24.14)$$

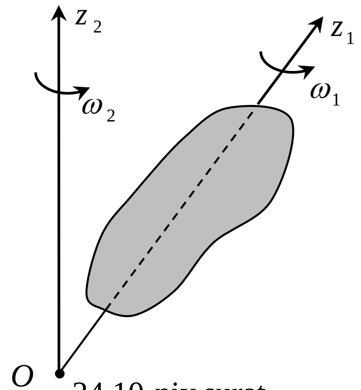
Emma $\overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2$ wektorlaýyn köpeltmek hasyly $\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2\right)$ jübütiň momentine deň. Diýmek:

$$\vec{\upsilon} = \vec{m}\left(\vec{\omega}_1 \, , \, \vec{\omega}_2\right) \qquad (24.15)$$

Bu ýerden:
1) M nokadyň tizliginiň ululygy $\omega_2 \cdot O_1O_2$ ululyga deň, ugry boýunça $\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2\right)$ jübütiň tekizligine perpendikulýar;
2) M nokadyň tizligi bu nokadyň saýlanyp alnyşyna bagly däl, jisimiň ähli nokatlarynyň tizlikleri şu pursatda deň, ýagny jisimiň hereketi öňe bolan hereketdir.
Netije. Aýlanmalar jübüti, tizligi $\left(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2\right)$ jübütiň momentine deň bolan öňe bolan hereketdir.

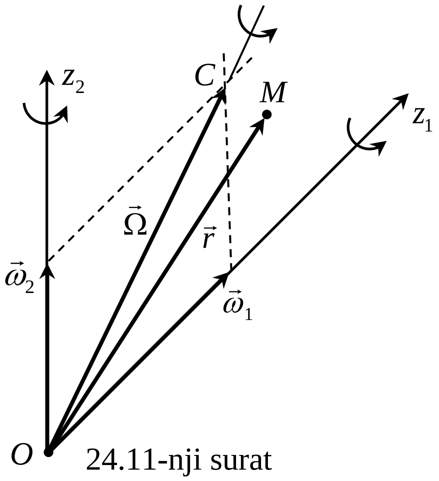
24.4. Kesişýän oklaryň daşynda bolup geçýän aýlanma hereketleriň goşulyşy.

Goý, jisim z_1 okuň daşyndan ω_1 burç tizligi bilen aýlanyp (görälik hereket), z_1 ok z_2 okuň daşyndan ω_2 burç tizligi bilen aýlanýan (göçürme hereket) bolsun. $O - z_1$ we z_2 oklaryň kesişme nokady.



24.10-njy surat

ω_1, ω_2 burç tizlikleriniň wektorlaryny şekillendireliň. *M*–jisimiň erkin nokady.



24.11-nji surat

$\vec{r} - M$ nokadyň *O* nokatdan geçirilen radius-wektory.
M nokadyň tizligi iki düzüjiden durýar: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$.
$\vec{\upsilon}_1$–*M* nokadyň göräli̇k tizligi;
$\vec{\upsilon}_2$–*M* nokadyň göçürme tizligi.

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} \ , \ \vec{\upsilon}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

Onda:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} \qquad (24.14)$$

M nokadyň erkin saýlanandygy sebäpli alarys:

Jisimiň nokatlarynyň tizlikleri *O* nokatdan geçýän okuň daşyndan $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ burç tizlikli aýlanma hereketdäki ýaly paýlanýar. Diýmek, $\vec{\Omega}$ wektoryň ugrukdyrylan *OC* oky pursatdaky aýlanma oky bolup durýar.

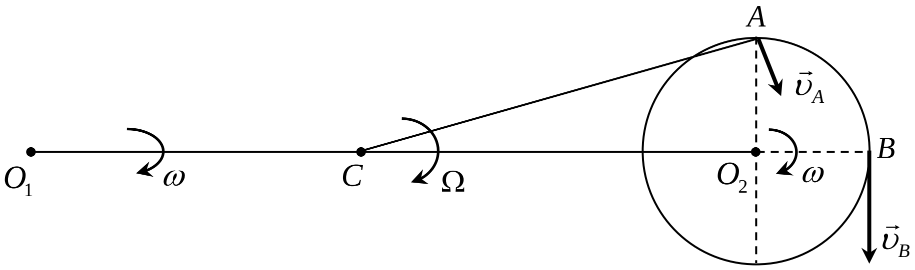
$\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ wektorlaryň üstünde parallelogram guralyň. $\vec{\Omega}$ wektor bu parallelogramyň diagonaly boýunça ugrukdyrylan. Jisimiň absolýut burç tizligi:

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos\alpha} \ , \qquad (24.16)$$

bu ýerde $\alpha = \vec{\omega}_1 \hat{,} \vec{\omega}_2$.

Käbir mysallara seredip geçeliň.

Mysal. Uzynlygy *l* bolan O_1O_2 kriwoşip O_1 nokadyň daşynda, sagat diliniň hereketiniň ugruna ω burç tizlikli aýlanýar. Radiusy *r* bolan disk O_2 nokadyň daşyndan, sagat diliniň hereketiniň ugruna ω burç tizlikli aýlanýar. A,B nokatlaryň absolýut tizlikleriniň ugurlaryny we ululyklaryny kesgitlemeli.



24.12-nji surat

Çözülişi. Göralik we göçürme burç tizlikleriniň deňdikleri sebäpli pursatdaky aýlanma merkezi bolan C nokat O_1O_2 kesimiň ortasynda ýerleşýär, ýagny

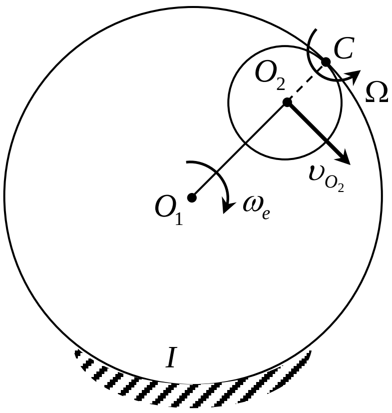
$$O_1C = CO_2 = \frac{l}{2}$$

Diskiň absolýut burç tizligi $\Omega = 2\omega$. Onda

$$\upsilon_A = \Omega \cdot CA = 2\omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \omega \cdot \sqrt{4r^2 + l^2} \quad , \quad \vec{\upsilon}_A \perp CA,$$

$$\upsilon_B = \Omega \cdot CB = 2\omega \cdot \left(\frac{l}{2} + r\right) \quad , \quad \vec{\upsilon}_B \perp CB.$$

Mysal. Uzynlygy l bolan O_1O_2 kriwoşip O_1 nokadyň daşyndan ω_e burç tizlikli aýlanýar. Radiusy r bolan disk O_2 nokadyň daşyndan aýlanyp, gozganmaýan **I** tigiriň içki ýüzi boýunça typman hereket edýär. Diskiň O_2 nokadyň daşyndan aýlanmasynyň göralik ω_r burç tizligini, Ω absolýut burç tizligini kesgitlemeli.



24.13-nji surat

Çözülişi. I tigiriň gozganmaýandygy sebäpli C nokat disk üçin pursatdaky aýlanma merkezi bolup durýar:

$$\upsilon_{O_2} = \omega_e \cdot l \ , \qquad (*)$$

başga tarapdan

$$\upsilon_{O_2} = \Omega \cdot r \qquad (**)$$

(*) , (**) deňliklerden taparys:

$$\Omega = \omega_e \cdot \frac{l}{r}$$

Bilşimiz ýaly,

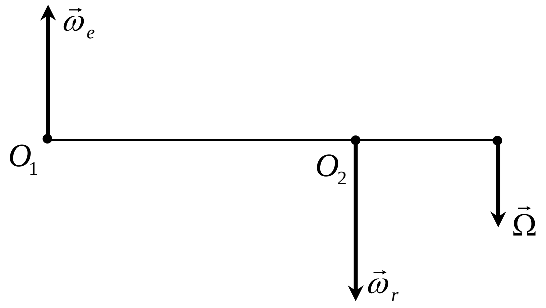
$$\Omega = \omega_e - \omega_r \ .$$

Onda

$$\omega_r = \omega_e - \Omega = \omega_e - \omega_e \frac{l}{r} = \omega_e \cdot \frac{r-l}{r} = -\omega_e \cdot \frac{l-r}{r}$$

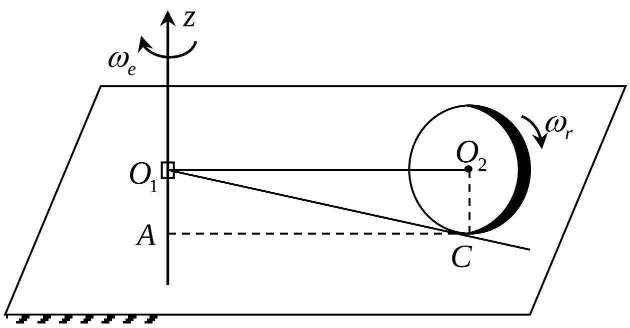
„–“ alamat göralik aýlanmasynyň göçurme aýlanmasyna garşylyklydygyny görkezýär.

Burç tizlikleriniň wektorlaryny şekillendireliň:



24.14-nji surat

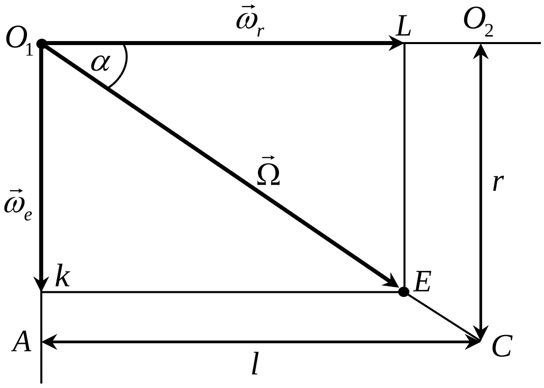
Mysal. Diskiň O_1O_2 gorizontal oky z okuň daşyndan ω_e burç tizlikli aýlanýar. Disk gorizontal tekizlik boýunça typman hereket edýär. Diskiň O_1O_2 okuň daşyndan ω_r göralik burç tizligini, Ω absolýut burç tizligini kesgitlemeli. Diskiň radiusy r, $O_1O_2 = l$



24.15-nji surat

A–z okuň we gorizontal tekizligiň kesişme nokady.

Çözülişi. Diskiň typman hereket edýändigi sebäpli onuň C (diskiň gorizontal tekizlik bilen galtaşýan nokady) nokadynyň tizligi nola deň. O_1–gozganmaýan nokat. Diýmek, O_1C göni çyzyk diskiň pursatdaky aýlanma oky bolup durýar. $\vec{\Omega}$ wektor bu göni çyzyk boýunça ugrukdyrylan. $\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_r, \vec{\Omega}$ wektorlary guralyň.



24.16-njy surat

O_1LE üçburçlukdan:

$$\Omega = \frac{\omega_e}{\sin\alpha} = \frac{\omega_e}{\dfrac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}}} = \frac{\omega_e\sqrt{l^2 + r^2}}{r}$$

$$\omega_r = \Omega \cdot \cos\alpha = \frac{\omega_e\sqrt{l^2 + r^2}}{r} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{\omega_e \cdot l}{r}$$